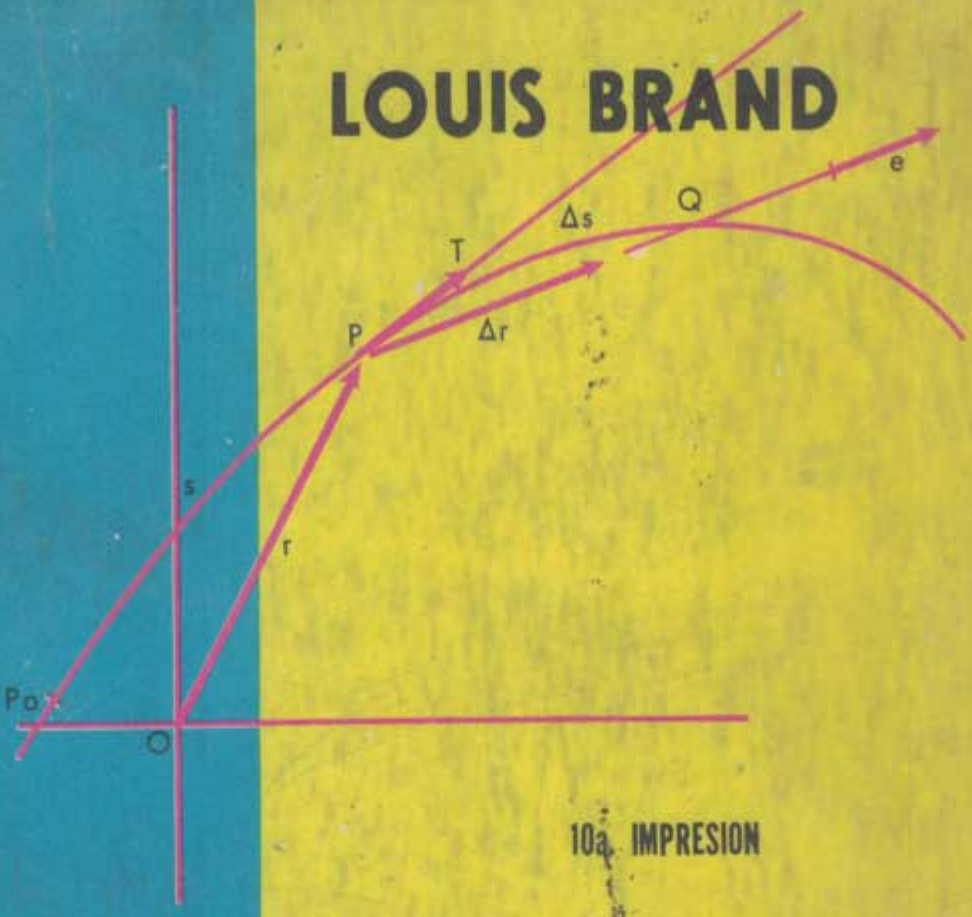
LOUIS BRAND



10a. IMPRESION

ANALISIS VECTORIAL

La Teoría Fundamental del Algebra y el Cálculo Vectorial, más una Introducción a sus aplicaciones a la estática, dinámica, mecánica de los fluidos y electrodinámica

C. E. C. S. A.

Análisis Vectorial

LOUIS BRAND

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
MEXICO – ESPAÑA – ARGENTINA – CHILE

SUCURSALES, DEPOSITOS Y REPRESENTACIONES EN:

Bolivia - Brasil - Colombia - Costa Rica - Dominicana - Ecuador - El Salvador
Estados Unidos - Guatemala - Honduras - Nicaragua - Panamá - Paraguay
Perú - Portugal - Puerto Rico - Uruguay - Venezuela

TÍTULO ORIGINAL EN INGLÉS:

VECTOR ANALYSIS

TRADUCIDO POR EL
ING. TOMÁS S. GARZA

REVISADO POR EL
ING. E. PICAZO

EDICIÓN AUTORIZADA POR
JHON WILEY & SONS, INC., NEW-YORK

Primera edición en español: febrero de 1959

Impresiones de la primera edición en español:
octubre de 1959; mayo de 1960; julio de 1962;
mayo de 1963; julio de 1964; noviembre de 1965;
enero de 1967; marzo de 1969

Décima impresión en español:
agos de 1970

Derechos Reservados © en Lengua Española–1959,
Primera Publicación

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
CALZADA DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

AV. REP. ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA
ENTRE RÍOS NÚM. 1256, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE

Dedico este libro a mi antiguo maestro y decano

HERMAN SCHNEIDER

en homenaje al fundador de la educación cooperativa, en el quincuagésimo aniversario de su iniciación, 1906-1956.

"Juntando la teoría a la práctica, para vincular la educación a la industria, mediante el conocimiento y la experiencia."

(Inscripción al extremo poniente del Cuadrilátero Herman Schneider, Universidad de Cincinnati.)

Prefacio

Actualmente, el tratamiento vectorial de la geometría diferencial, de la mecánica, de la hidrodinámica y de la electrodinámica, es prácticamente un procedimiento estándar. El uso de los vectores no sólo simplifica y condensa la exposición, sino que además, hace los conceptos matemáticos y físicos más tangibles y fáciles de captar. No está lejano el día en que el álgebra vectorial se introduzca en la geometría analítica, dando de esta manera al estudiante la doble ventaja de una introducción anticipada a la materia y a la vez eximirlo de memorizar una gran cantidad de fórmulas. Los productos escalares y vectoriales de Gibbs, tan íntimamente ligados a todas las cuestiones de perpendicularidad y paralelismo, permiten escribir cómodamente las ecuaciones de rectas y planos y resolver cualquier problema de distancias de la manera más natural. Hasta la simple ley distributiva, $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$, proporciona la ventaja de usar las propiedades de los triángulos semejantes sin las figuras correspondientes y virtualmente a ciegas. Y entonces, ese enorme paso de dos a tres dimensiones —que generalmente ocurre tan tardíamente en el curso, que el estudiante pierde la ilación— es completamente innecesario. Y esto, porque comenzamos en tres dimensiones, o sea, en el mundo en el que vivimos, basándonos en el excelente axioma de J. Willard Gibbs: *El todo es más simple que sus partes.*

El análisis vectorial también se ha abierto camino a través del cálculo y actualmente aparece en todo texto moderno sobre esta materia. El gradiente, la divergencia y el rotacional, en su condición de invariantes, forman el lenguaje natural de la ciencia espacial. Eludir estos conceptos es inconsecuente y, si se usan las extensas notaciones escalares, cada vez que aparecen se hace un desperdicio de tiempo y esfuerzo. Estoy seguro de que la introducción de la divergencia y el rotacional desde el principio, como invariantes de una diádica (el gra-

diente de un vector), es no solamente el procedimiento correcto, sino que es de hecho lo más sencillo. A pesar de que esto requiere un ligero conocimiento de las diádicas, o tensores de valencia dos, el tiempo está bien utilizado, pues el mundo está lleno de tensores importantes que el estudiante, con dedicación, puede encontrar en seguida. En este libro el uso de las diádicas ha sido llevado al mínimo y, en consecuencia, la dinámica de los cuerpos rígidos (con su diádica de inercia) y la teoría de la elasticidad (con sus tensores de deformación y esfuerzo), han tenido que ser omitidos. Además, este libro ha sido concebido como un curso corto para dotar al estudiante de las herramientas del álgebra y el cálculo vectorial y darle una pequeña muestra de la variedad de sus aplicaciones. Así, la ecuación de la variación angular de un vector unitario radiante, es la clave de las particularidades del movimiento de los giróscopos, pero en este libro no hablamos de ellos por quedar fuera de su alcance. Después de todo, un pequeño libro sobre análisis vectorial no puede pretender ser además un tratado de física matemática. Sin embargo, las aplicaciones han sido desarrolladas hasta poder ilustrar completamente los usos de la función potencial, escalar y vectorial. Más aún, los postulados básicos de las ciencias con los que se ha tratado, han sido llevados hasta su base para hacer destacar su estructura lógica.

Puesto que el concepto de vector ha sido muy generalizado en la geometría y en la física matemática, el último capítulo ofrece una breve introducción a los espacios vectoriales abstractos, junto con las ideas de dependencia lineal, base y dimensión. Como este capítulo es necesariamente abstracto, se puso especial empeño en que la exposición fuese lo más clara y simple posible.

En mi libro, más extenso, sobre *Análisis Vectorial y Tensorial*, he citado las elocuentes palabras de Bertrand Russell sobre las matemáticas como ciencia y como arte. Son dignas de ser citadas de nuevo:

"El verdadero espíritu de delectación, la exaltación, el sentimiento de ser más que un hombre, que es la piedra de toque de la más elevada excelencia, se encuentra en las matemáticas tanto como en la poesía. Lo mejor de las matemáticas merece no solamente que se aprenda como una tarea, sino además que se asimile como parte del pensamiento cotidiano y se lleve una y otra vez a la mente con brío siempre renovado. La vida real, para la mayoría de los hombres, es una transac-

ción constante entre lo real y lo posible, pero el mundo de la razón pura no conoce concesiones ni limitaciones prácticas, así como tampoco barreras para la actividad creadora que materializa en espléndidas estructuras la apasionada búsqueda de lo perfecto, de la cual nacen todas las grandes obras."

En vista de que en este libro se dan referencias bastante completas, se pondrá el número de un artículo, así como el de la página, en la parte superior de cada una de éstas. Las ecuaciones en cada artículo están numeradas en orden, (1), (2)... Para referirse a una ecuación de otro artículo, se dará el número del artículo y el de la ecuación a la izquierda y derecha de un punto, respectivamente; así, (8.3) significa la ecuación (3) del artículo 8. Para las figuras, se dará el número del artículo en el que aparecen, seguido de la letra *a*, *b*, *c*..., así, la Fig. 2*c* es la tercera figura del artículo 2. En las notas al pie de la página, las referencias a mis libros *Vectorial Mechanics*, *Vector and Tensor Analysis*, *Advanced Calculus*, se darán simplemente por el título.

El **tipo negrita** se usa en el texto para denotar diádicas o vectores. La magnitud de un vector **v** se denotará por $|\mathbf{v}|$ o, en ocasiones, por v. Un desplazamiento desde A hacia B se escribirá $\overrightarrow{AB}$. Las flechas escritas arriba de un símbolo pueden ser usadas para denotar vectores.

Finalmente, deseo expresar mi agradecimiento por la contribución del fondo Taft para la mecanografía del manuscrito, y extender mi gratitud a mis colegas, los profesores Jaeger y Restemeyer por sus consejos y sugestiones. Igualmente, deseo expresar mi reconocimiento a la señora Anne Hagedorn por su eficiencia y paciente preparación del manuscrito.

LOUIS BRAND.

Universidad de Cincinnati

CONTENIDO

PÁG.

CAPÍTULO 1. ÁLGEBRA DE VECTORES

1. Vectores 15
2. Adición de Vectores 16
3. Substracción de Vectores 18
4. Multiplicación de Vectores por Números 19
5. Punto de División 21
6. Relaciones Lineales Independientes del Origen 27
7. Centroide 28
8. Componentes Rectangulares 33
9. Productos de dos Vectores 36
10. Producto Escalar 37
11. Producto Vectorial 42
12. Triple Producto Vectorial 49
13. Triple Producto Escalar 50
14. Productos de Cuatro Vectores 53
15. Bases Recíprocas 56
16. Bases Generales 60
17. Ecuaciones de la Recta y del Plano 61
18. Resumen del Álgebra de Vectores 65

CAPÍTULO 2. VECTORES DESLIZANTES

19. Momento de un Vector Deslizante 67
20. Adición de Vectores Deslizantes 69
21. Pares 71
22. Vectores Deslizantes Coplanares 74
23. Estática 78

CAPÍTULO 3. FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE

24. Derivada de un Vector 81
25. Derivadas de Sumas y Productos 82
26. Curvas 83
27. Vector Tangente 85
28. Vector Unitario Tangente 86
29. Fórmulas de Frenet 90
30. Curvatura y Torsión 93
31. Curvas Planas 95

PÁG.

32. Cinemática de una Partícula 100
33. Velocidad Relativa 103
34. Velocidad Angular Como Vector 106
35. Cinemática de un Cuerpo Rígido 109

CAPÍTULO 4. INVARIANTES DIFERENCIALES

36. Superficies 115
37. Derivada Direccional 119
38. Gradiente de un Vector 123
39. Invariantes de una Diádica 126
40. Divergencia Rotacional 128
41. Fórmulas de Producto 132
42. Coordenadas Curvilíneas 134

CAPÍTULO 5. TEOREMAS SOBRE INTEGRALES

43. Integrales de Línea 141
44. Integrales de Línea Independientes de la Trayectoria 145
45. Vectores Irrotacionales 148
46. Regiones Simplemente Conexas 153
47. Teorema de Green en el Plano 156
48. Formas Vectoriales del Teorema de Green 163
49. Integrales de Superficie 166
50. Teorema de Stokes 167
51. Teorema de Stokes Generalizado 170
52. Teorema de Divergencia 172
53. Teorema de Divergencia Generalizado 179
54. Vectores Solenoidales 180
55. Identidades de Green 185
56. Funciones Armónicas 188
57. Revisión 193

CAPÍTULO 6. DINÁMICA

58. Dinámica de una Partícula 199
59. Ecuaciones del Movimiento 200
60. Trabajo y Energía 205
61. El Sistema Solar 208
62. Sistemas de Partículas 215
63. Un Cuerpo que Gira Alrededor de un Eje Fijo 219

CAPÍTULO 7. MECÁNICA DE LOS FLÚIDOS

64. Flúidos Perfectos 223
65. Ecuación de Continuidad 224
66. Ecuación de Euler 226

PÁG.

67. Flúidos en Equilibrio 228
68. Vorticidad 231
69. Teorema de Circulación 232
70. Movimiento Irrotacional 234
71. Movimiento Uniforme 237
72. Movimiento Plano 239
73. Mecánica de los Flúidos 244

CAPÍTULO 8. ELECTRODINÁMICA

74. Ecuaciones de Maxwell 247
75. Forma Integral de las Ecuaciones Maxwell 250
76. Ley de Ohm 252
77. Unidades y Dimensiones 254
78. Ecuación de Onda 257
79. Ley de Coulomb 258
80. Vector de Poynting 261
81. Potenciales 262
82. Electrostática 264
83. Conductores 269
84. Capacidad 274
85. Magnetostática 280
86. Potencial Magnetostático 285
87. Fuerzas Sobre Cargas y Corrientes 289

CAPÍTULO 9. ESPACIOS VECTORIALES

88. Postulados 293
89. Dependencia Lineal 295
90. Subespacios 296
91. Base y Dimensión 298
92. Conjuntos Ordenados 300
93. Producto Interior 301
94. Espacio Vectorial Euclidiano 302
95. Proceso de Gram-Schmidt 306
96. Bases Recíprocas 307
97. Espacio de Hilbert 311
98. Ecuaciones Lineales 318

APÉNDICE

Cantidades, Dimensiones y Unidades 323
Problemas Suplementarios 325
Soluciones a los Problemas 329

La ciencia y sus aplicaciones se fusionan como el árbol y sus frutos.

PASTEUR.

Capítulo 1

Algebra de Vectores

1. **Vectores.** *Un vector es un segmento de recta dirigido.* Un vector desde el punto A hasta el punto B se denota por $\vec{AB}$. El vector $\vec{AB}$ tiene la *longitud* AB y la *dirección* de A hacia B. Además de los *vectores propios*, que tienen una longitud y una dirección definidas, introduciremos el *vector nulo* $\vec{AA}$, que tiene longitud cero, y ninguna dirección definida.

Un *escalar* es un número cuyo valor es el mismo en todos los sistemas de referencia. Así, la longitud de un vector es un escalar, pero los cosenos directores de un vector no son escalares, ya que su valor depende de la sección de los ejes coordenados.

Como adición a la notación anterior, por medio de la cual especificamos un vector dando los puntos que une, usaremos también letras solas en tipo negrita (como $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) para denotar vectores. El vector nulo se escribirá entonces $\mathbf{0}$. La longitud del vector $\mathbf{u}$ se denota por $|\mathbf{u}|$; además, se tiene $|\mathbf{0}| = 0$. Un vector de longitud 1 se llama *vector unitario*. En manuscrito, un vector puede denotarse mediante una sola letra con una flecha arriba de ella.

Construiremos ahora un álgebra de vectores mediante las definiciones de igualdad, adición y multiplicación de vectores por números reales o *escalares*.

Se dice que dos vectores son iguales cuando tienen la misma longitud y la misma dirección. Así, un vector $\mathbf{u} = \vec{AB}$ es igual a todos los vectores obtenidos de $\vec{AB}$ mediante un desplazamiento paralelo o *translación*. El punto inicial de $\mathbf{u}$ puede ser elegido arbitrariamente, vg. P; entonces $\mathbf{u} = \vec{PQ}$ cuando la flecha $\vec{PQ}$ tiene la misma longitud que $\vec{AB}$ y es paralela a $\vec{AB}$ en el mismo sentido. En la Fig. 2*a*, por ejemplo, los vecto-

res que forman los lados opuestos de un paralelogramo son iguales y por lo tanto pueden representarse por medio de la misma letra. Así

$$\vec{AB} = \vec{DC} = \mathbf{u}. \qquad \vec{AD} = \vec{BC} = \mathbf{v}.$$

Los vectores que se comporten de acuerdo con la definición anterior se dice que son *libres*. Pero en algunas aplicaciones es preferible usar otras definiciones. Así, las fuerzas que actúen sobre un cuerpo rígido pueden ser tomadas como vectores obligados a actuar sobre una línea dada, su *línea de acción*. Estos vectores fuerzas no son libres, ya que solamente pueden desplazarse sobre una recta fija, pues cualquier otra translación alteraría su efecto dinámico. A estos vectores limitados a una línea fija de acción, los llamaremos *vectores deslizantes*. Dos vectores deslizantes son iguales sólo y cuando tengan la misma longitud, la misma dirección y además estén sobre la misma línea de acción.

A los vectores que tienen una posición fija en el espacio, se les llama *vectores anclados*. Así, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo deformable, pueden tomarse como vectores anclados, puesto que cualquiera translación de dichas fuerzas alteraría su efecto sobre el cuerpo. Dos vectores anclados son iguales cuando tienen la misma longitud, la misma dirección y ocupan la misma posición en el espacio.

En este capítulo hablaremos solamente de vectores *libres*, y comenzaremos nuestra álgebra definiendo la adición de vectores libres y la multiplicación de los mismos por escalares.

2. Adición de vectores. Un desplazamiento rectilíneo, o *translación*, desde A hasta B, puede representarse como un vector $\vec{AB}$. Si a una partícula se le imprimen dos desplazamientos, uno desde A hasta B, y otro desde B hasta C, el resultado es el mismo que si se hubiera desplazado la partícula desde A hasta C, directamente. Esto nos sugiere la relación

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \tag{1}$$

Tomaremos esta ecuación como la definición de adición de vectores y, así, la suma de dos vectores u, v (Fig. 2*a*), se define mediante la

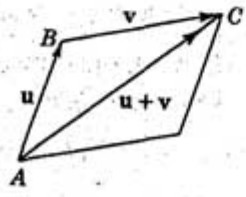


Fig. 2*a*. Construcción del triángulo.

CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO. Dibújese $\mathbf{v}$ desde la extremidad de $\mathbf{u}$. Entonces, el vector dirigido desde el origen de $\mathbf{u}$ hasta la extremidad de $\mathbf{v}$, es la suma de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y se escribe $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

Puesto que cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos lados, se tiene

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{2}$$

tomando el signo igual solamente cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección.

La adición de vectores es conmutativa:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u} \tag{3}$$

Esto es evidente en la Fig. 2*b*, ya que

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \qquad \mathbf{v}+\mathbf{u} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$$

La adición de vectores es asociativa:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}). \tag{4}$$

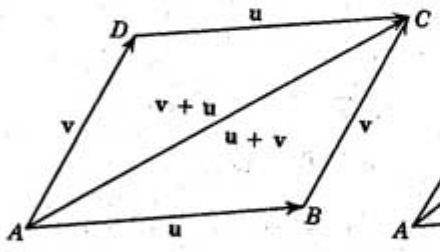


Fig. 2*b*. Ley conmutativa.

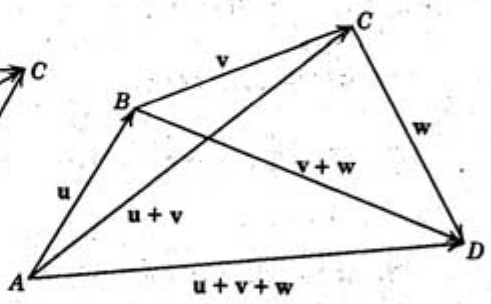


Fig. 2*c*. Ley asociativa.

Esto es evidente en la Fig. 2*c*, ya que

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = (\vec{AB}+\vec{BC})+\vec{CD} = \vec{AC}+\vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \vec{AB}+(\vec{BC}+\vec{CD}) = \vec{AB}+\vec{BD} = \vec{AD}$$

Puesto que las dos sumas en (4) son iguales, se escribe simplemente: $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$.

De las leyes conmutativa y asociativa, deducimos inmediatamente el siguiente

TEOREMA. *La suma de cualquier número de vectores es independiente del orden en que se sumen y de los agrupa-*

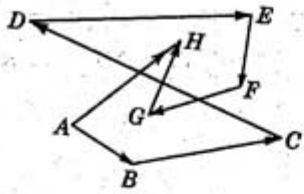


Fig. 2*d*. Suma de vectores.

mientos que se hagan para formar sumas parciales.

Para construir la suma de cualquier número de vectores, se forma una línea quebrada cuyos segmentos dirigidos representan esos vectores tomados en cualquier orden. Entonces, el vector dirigido desde el principio hasta la extremidad de la línea quebrada representa la suma deseada. Si $A, B, C, \cdots, G, H$ son los vértices sucesivos de la línea quebrada (Fig. 2*d*), entonces

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \cdots + \vec{GH} = \vec{AH} \tag{5}$$

Si, al construir una suma de vectores, la extremidad del último vector coincide con el origen del primero, decimos que la suma de dichos vectores es *cero*. Así, si H coincide con A, en (5), escribimos

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \cdots + \vec{GA} = \vec{AA} = 0 \tag{6}$$

Si $\vec{AB} = \mathbf{u}$, tenemos

$$\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB}, \qquad \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB};$$

$$0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}. \tag{7}$$

3. Substracción de vectores. La suma de dos vectores es cero cuando y sólo cuando ambos tengan la misma longitud y direcciones opuestas:

$$\vec{AB} + \vec{BA} = 0$$

Si $\vec{AB} = \mathbf{u}$, es natural escribir $\vec{BA} = -\mathbf{u}$, a fin de que la ecuación característica para los números negativos

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

sea válida para los vectores tanto como para los números. Entonces, por definición:

El negativo (aditivo inverso) de un vector, es un vector de la misma longitud, pero de dirección opuesta.

Nótese también que $-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ subsiste para vectores tanto como para números.

La diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ de dos vectores se define por medio de la ecuación

$$(2) \qquad (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{u}$$

Sumando $-\mathbf{v}$ a ambos miembros, y usando (1), se obtiene

$$(3) \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

Restar un vector es equivalente a sumar su negativo (aditivo inverso). La construcción de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ que satisface a (2) se muestra en la Fig. 3*a*.

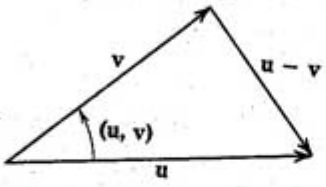


Fig. 3*a*. Substracción de vectores.

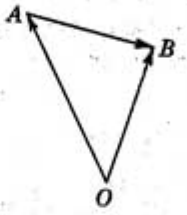


Fig. 3*b*. Diferencia de vectores de posición.

Con respecto a un origen O, un punto P en el espacio, se determina por medio de su *vector de posición* $\overrightarrow{OP}$. Cualquier vector $\overrightarrow{AB}$ puede expresarse como la diferencia de los vectores de posición de sus extremidades (Fig. 3*b*): así,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA})$$

y, de (3),

$$(4) \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

4. Multiplicación de vectores por números. El vector $\mathbf{u} + \mathbf{u}$ se denota, naturalmente, por $2\mathbf{u}$ y, similarmente, escribimos $-\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -2\mathbf{u}$. Luego, $2\mathbf{u}$ y $-2\mathbf{u}$ denotan vectores de longitud doble que $\mathbf{u}$; $2\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{u}$, $-2\mathbf{u}$ tiene dirección opuesta. Esta notación se generaliza como sigue:

El producto de un vector $\mathbf{u}$ *por un número* λ *(se escribe* $\lambda\mathbf{u}$ *o* $\mathbf{u}\lambda$*), se define como un vector* λ *veces más largo que* $\mathbf{u}$ *y con su misma dirección, u opuesta, de acuerdo con que* λ *sea positivo o negativo.*

De acuerdo con esta definición

$$(1) \qquad (-\alpha)\mathbf{u} = \alpha(-\mathbf{u}) = -\alpha\mathbf{u}, \quad (-\alpha)(-\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$$

y

$$(2) \qquad \alpha\mathbf{u} = \mathbf{u}\alpha, \ (\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}), \ (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

Más aún, puesto que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales,

$$(3) \qquad \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

Esto se ve claramente en la Fig. 4*a*, en la que $\alpha > 0$. La ley distributiva (3) es una herramienta poderosa para obtener información geométrica por medios algebraicos.

Los desarrollos efectuados hasta ahora muestran que:

En lo que concierne a la adición, substracción y multiplicación por números escalares, los vectores obedecen las leyes del álgebra ordinaria.

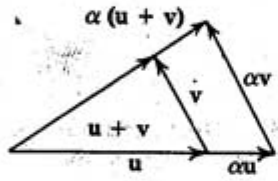


Fig. 4*a*. Ley distributiva.

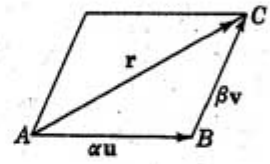


Fig. 4*b*. Base en un plano.

Si u y v son vectores paralelos, entonces ambos tienen la misma dirección y v es un múltiplo numérico de u:

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$$

Si u, v, r son vectores coplanares (u y v no paralelos), podemos escribir

$$(4) \qquad \mathbf{r} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

Porque, si construimos un paralelogramo con r como diagonal y sus lados paralelos a u y v, tenemos (Fig. 4*b*)

$$(5) \qquad \mathbf{r} = \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

Si u, v, w, r son vectores en el espacio (u, v, w no coplanares), podemos escribir

$$(6) \qquad \mathbf{r} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$$

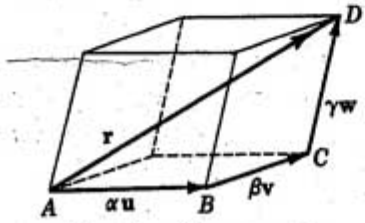


Fig. 4*c*. Base en el espacio.

Ya que, si construimos un paralelepípedo con r como diagonal, con sus lados paralelos a u, v, w, tenemos (Fig. 4*c*)

$$\mathbf{r} = \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} =$$

$$= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$, donde M es el punto medio de BC.

2. Demostrar que $\vec{AB} + \vec{CD} = 2\vec{MN}$, donde M y N son los puntos medios de AC y BD.

3. $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son *vectores deslizantes* (§1) que actúan sobre dos rectas que se intersectan. Demostrar que $\vec{AC} + \vec{DB}$ es igual para todas las posiciones de $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$.

4. Si A, B, C, D son cuatro puntos cualesquiera, demostrar que

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} = 4\vec{PQ}$$

donde P y Q son los puntos medios de AC y BD.

5. Punto de división. Si A, B, C, son puntos de una recta, se dice que C divide al segmento AB en la razón λ, si

$$\vec{AC} = \lambda \vec{CB} \tag{1}$$

Evidentemente, λ es positivo o negativo, de acuerdo con que C esté dentro o fuera del segmento AB. A la izquierda de A, λ varía entre 0 y -1; a la derecha de B, λ varía entre $-\infty$ y -1. Cuando C describe toda la recta en el sentido AB, λ varía como sigue:

$$-1 < \lambda < 0 \quad (A) \quad 0 < \lambda < \infty \quad (B) \quad -\infty < \lambda < -1$$

Entonces, $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\infty$, $\lambda = -1$, cuando C está en A, en B, o en el punto al infinito de esa recta.

Para encontrar el vector de posición de C relativo a un origen O (Fig. 5a), se escribe (1) en la forma

$$\vec{OC} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OB} - \vec{OC});$$

entonces

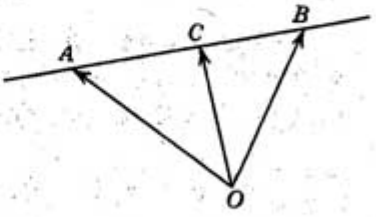


Fig. 5a. Punto de división.

$$\vec{OC} = \frac{\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{1 + \lambda}; \tag{2}$$

Denotaremos los vectores de posición de A, B, C por medio de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Entonces, si $\lambda = \beta/\alpha$, (2) se convierte en

$$\mathbf{c} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha + \beta} \tag{3}$$

Esta ecuación establece que C divide al segmento AB en la razón β/α. Así, el punto medio de AB ($\alpha = \beta = 1$) tiene el vector de posición $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

De (3), deducimos el

TEOREMA 1. *Tres puntos distintos A, B, C están sobre una recta cuando y sólo cuando existan tres números α, β, γ, diferentes de cero, tales que*

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{4}$$

Demostración. Si A, B, C son colineales, C divide a AB en cierta razón β/α que es diferente de 0, ∞, o -1. Entonces, α, β, y $\alpha + \beta$ son diferentes de cero. Entonces, (3) es válida, y poniendo $\gamma = -(\alpha + \beta)$ se obtiene (4). Inversamente, la ecuación (4) se convierte en la (3) dividiendo

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = -\gamma\mathbf{c} \text{ por } \alpha + \beta = -\gamma;$$

y, por lo tanto, C está sobre la recta AB.

Las relaciones simétricas (4) nos dicen en qué manera cada punto divide al segmento formado por los otros dos. Así, (4) establece que A, B, C dividen a BC, CA, AB en las razones γ/β, α/γ, β/α, cuyo producto es 1.

TEOREMA 2. *Cuatro puntos A, B, C, D tales que no haya tres de ellos colineales, están sobre un plano cuando y sólo cuando existan cuatro números $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, diferentes de cero, tales que*

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \tag{5}$$

Demostración. Si A, B, C, D son coplanares, entonces AB es paralelo a CD, o AB corta a CD en un punto P (diferente de A, B, C, D). En los dos casos respectivamente tenemos

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = k(\mathbf{d} - \mathbf{c}), \quad \frac{\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{1 + \lambda} = \frac{\mathbf{c} + \lambda'\mathbf{d}}{1 + \lambda'} = \mathbf{p}$$

donde λ, λ' son diferentes de 0 y -1. En ambos casos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, están relacionados linealmente como en (5).

Inversamente, supongamos que las ecuaciones (5) son válidas. Si $\alpha + \beta = 0$ (y por lo tanto $\gamma + \delta = 0$), tenemos

$$\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{0}, \quad \alpha\overrightarrow{BA} = -\gamma\overrightarrow{DC}$$

y las rectas AB y CD son paralelas. Si $\alpha + \beta \neq 0$ (y por lo tanto $\gamma + \delta \neq 0$),

$$\frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}}{\gamma + \delta} = \mathbf{p}, \tag{6}$$

donde P es un punto común a las rectas AB y CD, ya que (3) muestra que P divide a AB y CD en las razones β/α, δ/γ. En ambos casos, A, B, C, D son coplanares.

Nótese que (5) proporciona bastante información. Si $\beta + \gamma \neq 0$,

$$\frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \delta\mathbf{d}}{\alpha + \delta} = \mathbf{q}, \tag{7}$$

y, si $\gamma + \alpha \neq 0$,

$$\frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma + \alpha} = \frac{\beta\mathbf{b} + \delta\mathbf{d}}{\beta + \delta} = \mathbf{r}. \tag{8}$$

El cuadrángulo completo $ABCD$ (Fig. 5*b*) tiene cuatro *vértices* y seis *lados*, que son las rectas que los unen. Los tres pares de lados opuestos se encuentran en los *puntos diagonales* P, Q, R dados por (6), (7) y (8). Estas ecuaciones expresan la manera en que cada punto diagonal divide al lado en que se encuentra.

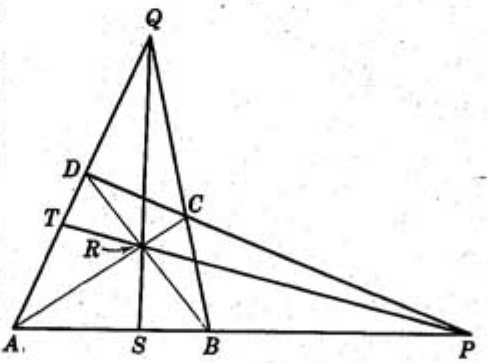


Fig. 5*b*. Cuadrángulo completo.

Si la prolongación de QR corta a AB en S, los puntos S y P dividen a AB externa e internamente en las razones numéricamente iguales $\neq \beta/\alpha$. Tales puntos se llaman los *conjugados armónicos* con respecto a AB (véase el Ej. 1).

Para demostrar esto, basta eliminar a $\mathbf{d}$ de

$$\alpha\mathbf{a} + \delta\mathbf{d} = (\alpha + \delta)\mathbf{q}, \quad \beta\mathbf{b} + \delta\mathbf{d} = (\beta + \delta)\mathbf{r},$$

por substracción. De esta manera obtenemos

$$\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b} = (\alpha + \delta)\mathbf{q} - (\beta + \delta)\mathbf{r},$$

$$\frac{\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha + \delta)\mathbf{q} - (\beta + \delta)\mathbf{r}}{\alpha - \beta} = \mathbf{s}.$$

Esto nos expresa que S divide a AB en la razón $-\beta/\alpha$.

Si la prolongación de PR corta a AD en T, entonces T y Q dividen a AD externa e internamente en las razones numéricamente iguales $\pm\delta/\alpha$. Entonces T y Q son *conjugados armónicos* con respecto a AD.

Ejemplo 1. Dos puntos C, D que dividan al segmento AB externa e internamente en razones numéricamente iguales $\pm\lambda$, se llaman *conjugados armónicos* con respecto a A, B. Los puntos A, B son *conjugados armónicos* con respecto a C, D; ya que, si resolvemos

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{1 + \lambda}, \quad \mathbf{d} = \frac{\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}}{1 - \lambda}$$

para $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, encontramos que A, B dividen al segmento CD en las razones $\pm(1 - \lambda)/(1 + \lambda)$.

Cuando C es cualquier punto de la recta AB, podemos encontrar su conjugado armónico D con respecto a AB, por medio de la siguiente construcción. Tómese un punto P fuera de la recta AB, dibújense PA, PB, PC (Fig. 5c). Escójase Q arbitrariamente sobre PC, trácense las rectas AQ y BQ y tómense sus intersecciones X en PB e Y en PA. Entonces, la prolongación de XY cortará a AB en D. Esto se sigue de las propiedades del cuadrángulo completo ABXY deducidas antes.

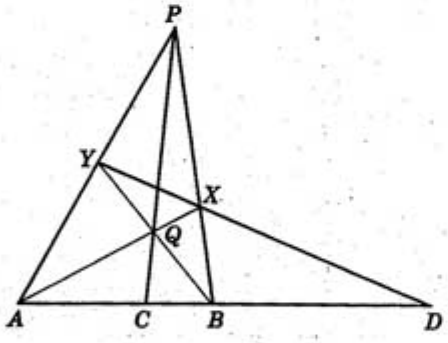


Fig. 5c. Construcción de conjugados armónicos.

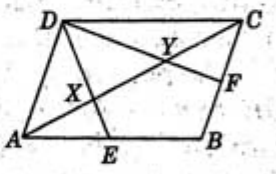


Fig. 5d. Trisección de la diagonal.

Ejemplo 2. En el paralelogramo $ABCD$, E y F son los puntos medios de los lados AB, BC (Fig. 5d). ¿De qué manera dividen las rectas DE y DF a la diagonal AC?

Las hipótesis de nuestro problema están expresadas por las ecuaciones:

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, \quad 2\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad 2\mathbf{f} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

Para encontrar el punto X cuando DE corta a AC, se elimina a $\mathbf{b}$ de la primera y de la segunda ecuación. Entonces

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} + 2\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \frac{\mathbf{d} + 2\mathbf{e}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{c}}{3} = \mathbf{x};$$

ya que el primer miembro representa un punto en DE, el segundo miembro, un punto en AC y, puesto que los puntos son el mismo, éste es la intersección X de dichas rectas. Al comparar con (3), se observa que X divide a DE en la razón 2/1 y a AC en la razón 1/2.

Para encontrar el punto Y donde DF corta a AC, eliminamos a $\mathbf{b}$ de la primera y de la tercera ecuaciones. Entonces

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} + 2\mathbf{f} = 2\mathbf{c}, \quad \frac{\mathbf{d}+2\mathbf{f}}{3} = \frac{\mathbf{a}+2\mathbf{c}}{3} = \mathbf{y}.$$

Por lo tanto, Y divide a DF en la razón 2/1 y a AC en la razón 2/1.

Ejemplo 3. El Trapezoide. Si $ABCD$ es un trapezoide con AB paralelo a DC (Fig. 5e), entonces

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{DC} \text{ o } \mathbf{b} - \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{d})$$

y por lo tanto

$$\mathbf{b} + \lambda\mathbf{d} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}, \quad \mathbf{b} - \lambda\mathbf{c} = \mathbf{a} - \lambda\mathbf{d}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse así:

$$\frac{\mathbf{b}+\lambda\mathbf{d}}{1+\lambda} = \frac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{c}}{1+\lambda} = \mathbf{p}, \quad \frac{\mathbf{b}-\lambda\mathbf{c}}{1-\lambda} = \frac{\mathbf{a}-\lambda\mathbf{d}}{1-\lambda} = \mathbf{q}$$

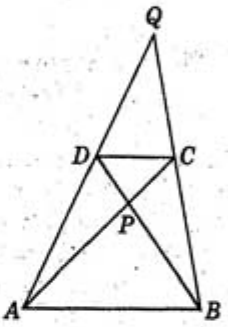


Fig. 5e. Trapezoide.

donde P es el punto donde las diagonales BD y AC se encuentran, y Q es el punto donde los lados BC y AD se encuentran. Evidentemente, P divide a las diagonales en la misma razón λ, y Q divide (externamente) a los lados en la razón $-\lambda$. Puesto que

$$(1 - \lambda)\mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

la prolongación de PQ bisectará a AB en R, ya que $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

En particular, si $\lambda = 1$, entonces el trapezoide es un paralelogramo. Entonces, las diagonales se bisectan en P, mientras que Q se va al infinito.

PROBLEMAS

1. De la ecuación (2.2), demostrar que $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$.

2. Si P está en la recta ABC y divide a AB, BC, CA en las razones λ, μ, ν, demostrar que $\lambda\mu\nu = -1$.

3. Si ABC es cualquier triángulo y L, M, N, los puntos medios de sus lados, demostrar que, para todo O, sucede que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$

4. Si $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$, ¿en qué razón el punto P de intersección de AB y $A'B'$ divide a estos dos segmentos?

5. Si $ABCD$ es un cuadrilátero (plano o no), demostrar que los puntos medios de sus lados forman un paralelogramo cuyo centro es $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})/4$.

6. En el triángulo ABC (Fig. 5*f*), demostrar que los segmentos AD, BE, no pueden bisectarse.

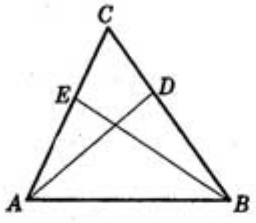


Fig. 5*f*. Segmentos que no se bisectan.

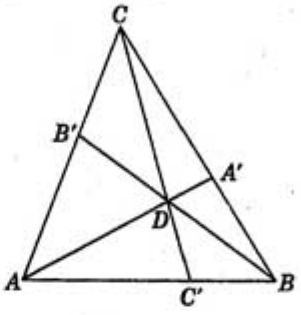


Fig. 5*g*. Teorema de Ceva.

7. En un cuadrilátero plano $ABCD$, el punto Q, en el que las diagonales AC, BD se intersectan, divide a estos segmentos en las razones 4/3 y 2/3 respectivamente. ¿En qué razón divide el punto P, en el que se intersectan los lados AB, CD, a estos segmentos?

8. **Teorema de Ceva.** El punto D está en el plano del triángulo ABC (Fig. 5*g*). Entonces (Teorema 2).

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Si AD, BD, CD cortan a los lados opuestos en A', B', C' respectivamente, demostrar que A', B', C' dividen a BC, CA, AB en las razones γ/β, α/γ, β/α, cuyo producto es 1.

9. En el Problema 8, demostrar que A', B', C' dividen a DA, DB, DC en las razones α/δ, β/δ, γ/δ, cuya suma es -1.

10. Justificar, *ab initio*, la construcción para los conjugados armónicos dada en el Ej. 1, Fig. 5*c*.

11. El cuadrángulo completo $ABCD$ (Fig. 5*b*) tiene como diagonales a AC, BD, PQ. Demostrar que sus puntos medios $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$, $\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$, $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ son colineales. (*Recta de Newton*).

[De (6), (7) y (8),

$$(\alpha + \beta)\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \ (\beta + \gamma)\mathbf{q} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}, \ (\gamma + \alpha)\mathbf{r} = \gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a};$$

por lo tanto, demostrar que

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \alpha\gamma(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \beta\delta(\mathbf{b} + \mathbf{d})].$$

12. **Teorema de Desargues.** Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos, en el mismo plano o en planos diferentes. Entonces, si las rectas AA', BB', CC' se encuentran en S, los tres pares de lados correspondientes (BC, $B'C'$), (CA, $C'A'$), (AB, $A'B'$), se intersectan en puntos colineales P, Q, R (Fig. 5*h*).

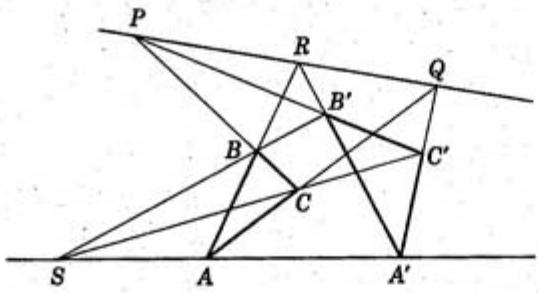


Fig. 5*h*. Teorema de Desargues.

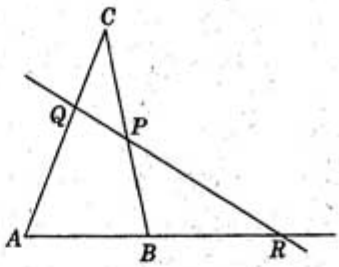


Fig. 5*i* Teorema de Menelao.

[En vista de (5.4), podemos escribir

$$\alpha\mathbf{a} + \alpha'\mathbf{a}' = \beta\mathbf{b} + \beta'\mathbf{b}' = \gamma\mathbf{c} + \gamma'\mathbf{c}' = s,$$
$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = 1.$$

Encontrar $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, y demostrar que

$$(\beta - \gamma)\mathbf{p} + (\gamma - \alpha)\mathbf{q} + (\alpha - \beta)\mathbf{r} = \mathbf{0}]$$

13. **Teorema de Menelao.** Una recta corta a los lados BC, CA, AB del triángulo ABC en los puntos P, Q, R. Si P divide a BC en la razón γ/β, y Q divide a CA en la razón α/γ, demostrar que R divide a AB en la razón $-\beta/\alpha$. Entonces, el producto de las razones de división es -1 (Fig. 5*i*).

14. Demostrar la inversa del teorema de Menelao: si P, Q, R dividen a BC, CA, AB en las razones γ/β, α/γ, $-\beta/\alpha$, cuyo producto es -1, entonces los puntos P, Q, R son colineales.

15. **Teorema de Pascal.** Los puntos A, B, C y A', B', C', están respectivamente en dos rectas que se intersectan en O. Si BC' y CB', CA' y AC', AB' y BA, se cortan en los puntos P, Q, R, demostrar que P, Q, R son colineales.

[Si $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}$, $\mathbf{a}' = \alpha'\mathbf{e}'$ etc., donde $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}'$ son vectores unitarios sobre las rectas, demostrar que

$$\alpha\alpha'(\gamma\gamma' - \beta\beta')\mathbf{p} + \beta\beta'(\alpha\alpha' - \gamma\gamma')\mathbf{q} + \gamma\gamma'(\beta\beta' - \alpha\alpha')\mathbf{r} = \mathbf{0}.]$$

16. $ABCD$ son los vértices de un paralelogramo, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Tómense los puntos P y Q en los lados AB y CD respectivamente. Si PD encuentra a QA en R y PC encuentra a QB en S, demostrar que la recta RS pasa por T, intersección de las diagonales.

6. Relaciones lineales independientes del origen. Hemos visto que los vectores de posición de puntos colineales o coplanares, satisfacen una ecuación lineal en la que la suma de los coeficientes escalares es cero. El significado de tales relaciones está dado por el

TEOREMA. *Una relación lineal de la forma*

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}, \tag{1}$$

que relaciona a los vectores de posición de los puntos $P_1, P_2 \cdots, P_n$, será independiente de la posición del origen O cuando, y sólo cuando la suma de los coeficientes escalares sea cero:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0. \tag{2}$$

Demostración. Cambiemos O a un nuevo origen O'. Escribiendo $\overrightarrow{OP_i} = \mathbf{p}_i$, $\overrightarrow{O'P_i} = \mathbf{p}_i'$, $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{d}$, tenemos $\mathbf{p}_i = \mathbf{d} + \mathbf{p}_i'$. Por lo tanto, (1) se convierte en

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\mathbf{d} + \lambda_1\mathbf{p}_1' + \lambda_2\mathbf{p}_2' + \cdots + \lambda_n\mathbf{p}_n' = 0.$$

Esta ecuación tendrá la misma forma que (1) cuando y sólo cuando se satisfaga (2).

Para dos, tres y cuatro puntos, tales relaciones lineales tienen un significado geométrico simple: es decir, los puntos son coincidentes, colineales o coplanares, respectivamente. Entonces, surge la pregunta: ¿Qué propiedad geométrica relaciona a cinco o más puntos cuyos vectores de posición satisfacen una relación lineal independiente del origen?

7. Centroide. Si un punto P está asociado a un número real m, hablaremos de P como un *punto ponderado* y lo denotaremos con el símbolo mP. Los puntos, por ejemplo, pueden representar partículas de materia y los números, sus masas o cargas eléctricas. En este último caso, los números pueden ser positivos o negativos. Definiremos ahora un punto P^*, que llamaremos el *centroide* de un conjunto de puntos ponderados.

El *centroide* de n puntos ponderados m_iP_i $(i = 1, 2, \cdots n)$, para los cuales $\Sigma m_i \neq 0$, se define como el punto P^* para el cual

$$\Sigma m_i \overrightarrow{P^*P_i} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

El caso $\Sigma m_i = 0$ debe ser excluido, ya que en ese caso (1) sería válido para cualquier P^* que escojamos (§6).

Vamos a demostrar primero que, cuando $\Sigma m_i \neq 0$, existe un punto P^* y solamente uno que satisface (1). Puesto que, con cualquier origen arbitrario O, (1) puede escribirse

$$\Sigma m_i(\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP^*}) = \mathbf{0} \tag{3.4},$$

entonces

$$(\Sigma m_i)\overrightarrow{OP^*} = \Sigma m_i \overrightarrow{OP_i} \tag{2}$$

Esta relación, independiente del origen O, determina la posición de P^* relativa a O. Por lo tanto P^* es *único* y su vector de posición con respecto a cualquier origen es

$$\mathbf{p}^* = \frac{\Sigma m_i \mathbf{p}_i}{\Sigma m_i} \tag{3}$$

En particular, si $O = P^*$, (3) se reduce a (1). Entonces, con respecto a cualquier origen, *el centroide de un conjunto de puntos ponderados tiene un vector de posición igual al promedio ponderado del conjunto dado de vectores de posición.*

El centroide de los puntos m_iP_i no se altera cuando los números m_i se reemplazan por otro conjunto cm_i proporcional a ellos, ya que en (3) la constante c puede cancelarse en el numerador y en el denominador. En particular, si todos los números m_i son iguales, podemos reemplazarlos por 1. El centroide de n puntos igualmente ponderados se llama su *centro medio* y está dado por

$$\mathbf{p}^* = \frac{\Sigma \mathbf{p}_i}{n} \tag{4}$$

Si el conjunto de los puntos m_iP_i tiene un subconjunto cuyo centroide ponderado es $m'P'$, podemos escribir (3) en la forma

$$\mathbf{p}^* = \frac{\Sigma' m_i \mathbf{p}_i + \Sigma'' m_i \mathbf{p}_i}{\Sigma' m_i + \Sigma'' m_i} = \frac{m'\mathbf{p}' + \Sigma'' m_i \mathbf{p}_i}{m' + \Sigma'' m_i}$$

donde Σ', Σ'', denotan sumaciones sobre el subconjunto y los puntos restantes, respectivamente. Esta ecuación demuestra que P^* es también el centroide del punto $m'P'$ y los puntos m_iP_i no incluidos en el subconjunto. Entonces, para encontrar centroides, *cualquier subconjunto de puntos puede ser reemplazado por su centroide ponderado.*

Ejemplo 1. El centroide de dos puntos αA, βB está dado por

$$\mathbf{p}^* = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha + \beta}, \quad \alpha + \beta \neq 0;$$

y, por lo tanto, P^* divide a AB en la razón inversa β/α de sus pesos. En particular, si $\alpha = \beta$, P^* es el punto medio de AB. *El centro medio de dos puntos está a la mitad de la recta que los une.*

Ejemplo 2. El centro medio P^* de tres puntos A, B, C está dado por

$$3\mathbf{p}^* = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Sean L, M, N los puntos medios de BC, CA, AB (Fig. 7*a*). Entonces

$$3\mathbf{p}^* = \mathbf{a} + 2\mathbf{l} = \mathbf{b} + 2\mathbf{m} = \mathbf{c} + 2\mathbf{n};$$

y, por lo tanto, los segmentos AL, BM, CN están divididos cada uno por P^* en la razón 2/1. Si A, B, C no son colineales, entonces son los vértices de un triángulo con AL, BM, CN como medianas. *Las medianas de un triángulo concurren en el centro medio de sus vértices y están divididos en ese punto en la razón* 2/1.

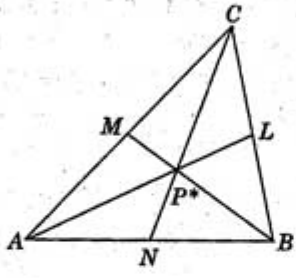


Fig. 7*a*. Centro medio de tres puntos.

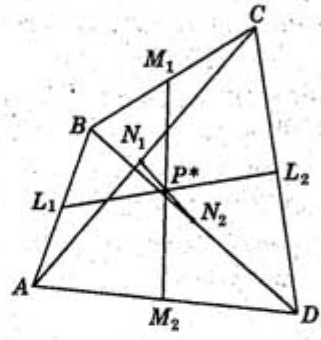


Fig. 7*b*. Centro medio de cuatro puntos.

Ejemplo 3. El centro medio P^* de cuatro puntos A, B, C, D está dado por

$$4\mathbf{p}^* = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}.$$

Sean L_1, L_2; M_1, M_2; N_1, N_2, los puntos medios de AB, CD; BC, DA, AC, BD, respectivamente (Fig. 7*b*). Entonces

$$4\mathbf{p}^* = 2\mathbf{l}_1 + 2\mathbf{l}_2 = 2\mathbf{m}_1 + 2\mathbf{m}_2 = 2\mathbf{n}_1 + 2\mathbf{n}_2;$$

y, por lo tanto, los segmentos L_1L_2, M_1M_2, N_1N_2 están cada uno divididos en la razón 1/1 (bisectados) por P^*. *Las bisectrices de los lados opuestos del cuadrángulo ABCD (plano o no) concurren en el centro medio de sus vértices y están todas bisectadas en ese punto.*

Ejemplo 4. Si los puntos A', B', C' dividen a los lados BC, CA, AB del triángulo ABC en las razones γ/β, α/γ, β/α, cuyo producto es 1, entonces las rectas AA', BB', CC' concurren en un punto, que es el centroide P^* *de* $\alpha A, \beta B, \gamma C$.

Puesto que A' es el centroide de βB y γC (Ej. 1),

$$(\alpha + \beta + \gamma)\,\mathbf{p}^* = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (\beta + \gamma)\mathbf{a}'.$$

Por lo tanto P^* está sobre AA' y, similarmente, sobre BB' y CC'. De esta manera hemos demostrado la inversa del teorema de Ceva (Prob. 5.8).

Podemos ahora responder la pregunta que surgió al final de §6. *Un conjunto de n puntos ponderados* $m_iP_i (m_i \neq 0)$, *que satisfaga una relación lineal*

$$\Sigma m_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad \Sigma m_i = 0, \tag{5}$$

independiente del origen, tiene la propiedad intrínseca de que, cualquier punto del conjunto es el centroide de los puntos ponderados restantes.

Demostración. Dividiendo

$$-m_1\mathbf{p}_1 = m_2\mathbf{p}_2 + m_3\mathbf{p}_3 + \cdots + m_n\mathbf{p}_n$$

por

$$-m_1 = m_2 + m_3 + \cdots + m_n,$$

obtenemos

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_2\mathbf{p}_2 + m_3\mathbf{p}_3 + \cdots + m_n\mathbf{p}_n}{m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

Entonces P_1 es el centroide de $m_2P_2, \cdots, m_nP_n$.

Se puede construir fácilmente un conjunto de n puntos que tengan esta propiedad. Se toma cualquier conjunto de $n-1$ puntos ponderados m_iP_i, y se agrega al conjunto su centroide P_n, con el peso

$$m_n = -(m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}) \neq 0.$$

Entonces, puesto que

$$-m_n\mathbf{p}_n = m_1\mathbf{p}_1 + m_2\mathbf{p}_2 + \cdots + m_{n-1}\mathbf{p}_{n-1},$$

el conjunto de n puntos ponderados m_iP_i satisface a (5). Llamaremos a tales conjuntos de puntos *autocentroides*.

El teorema 5.1 demuestra que, a tres puntos colineales A, B, C, pueden asociarse pesos diferentes de cero, de tal manera que formen un conjunto autocentroidal:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{6}$$

El teorema 5.2 demuestra que, a cuatro puntos coplanares cualesquiera A, B, C, D, tales que no haya tres de ellos colineales, pueden asociarse pesos diferentes de cero, tales que formen un conjunto autocentroidal:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \tag{7}$$

En ambos casos están determinadas las razones de los pesos.

Como una extensión natural de estos resultados, tenemos el

TEOREMA. *Si A, B, C, D, E son cinco puntos, tales que no haya cuatro de ellos coplanares, se les pueden asociar pesos diferentes de cero, de tal manera que se forme un conjunto autocentroidal:*

$$(8) \qquad \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} + \varepsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0.$$

Las razones *de los pesos están únicamente determinadas por las posiciones relativas de los puntos.*

Demostración. Ante todo, observamos que, si cualquier peso es nulo, existen cuatro puntos coplanares, lo que es contrario a la hipótesis. Puesto que

$$\vec{EA} = \mathbf{a} - \mathbf{e}, \quad \vec{EB} = \mathbf{b} - \mathbf{e}, \quad \vec{EC} = \mathbf{c} - \mathbf{e}, \quad \vec{ED} = \mathbf{d} - \mathbf{e}$$

no son coplanares, tenemos una relación lineal entre estos vectores (§4), digamos

$$\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{e}) + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{e}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{e}) + \delta(\mathbf{d} - \mathbf{e}) = \mathbf{0}.$$

Con $\varepsilon = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$, esta es una relación de la forma (8).

Sean ahora α', β', γ', δ', ε' un segundo conjunto de pesos, para los cuales

$$(9) \qquad \alpha'\mathbf{a} + \beta'\mathbf{b} + \gamma'\mathbf{c} + \delta'\mathbf{d} + \varepsilon'\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' = 0.$$

Multiplicamos (8) por ε', (9) por ε y restamos. Entonces

$$(\alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon)\mathbf{a} + \cdots + (\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon)\mathbf{d} = \mathbf{0},$$

$$(\alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon) + \cdots + (\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon) = 0;$$

luego, A, B, C, D serán coplanares a menos que todos los coeficientes sean nulos. Puesto que A, B, C, D no son coplanares, por hipótesis, debemos tener entonces

$$\alpha/\alpha' = \beta/\beta' = \gamma/\gamma' = \delta/\delta' = \varepsilon/\varepsilon'.$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que la suma de n vectores es

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{A_iB_i} = n\,\vec{A^*B^*}$$

donde A^* y B^* son los centros medios de los puntos A_i y B_i, respectivamente.

2. Sean A, B, C, D los vértices de un tetraedro y P^* su centro medio. Si A', B', C', D' son los centros medios de las tríadas BCD, CDA, DAB, ABC, demostrar que P^* divide a cada uno de los segmentos AA', BB', CC', DD' en la razón de 3/1.

3. Las rectas trazadas desde un punto E a los vértices A, B, C, D de un tetraedro, cortan a los planos de las caras opuestas en A', B', C', D'. Demostrar que la suma de las razones en que estos puntos dividen a EA, EB, EC, ED es -1. [Usar (8).]

4. **Teorema de la transversal de Carnot.** Una recta corta a los lados de un polígono plano $P_1P_2\cdots P_n$ en n puntos distintos $R_1, R_2, \cdots, R_n$. Demostrar que el producto de las razones en que R_1 divide a P_1P_2, R_2 divide a $P_2P_3, \cdots$, R_n divide a P_nP_1, es $(-1)^n$.

[Escríbase
$$(x_1 - x_2)\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{p}_1 - x_2\mathbf{p}_2$$
$$(x_2 - x_3)\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{p}_2 - x_3\mathbf{p}_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_n - x_{n+1})\mathbf{r}_n = x_n\mathbf{p}_n - x_{n+1}\mathbf{p}_1.$$

La suma de los puntos ponderados en la izquierda es $(x_1 - x_{n+1})\mathbf{p}_1$. Si $x_1 - x_{n+1} \neq 0$, entonces P_1 será su centroide. Puesto que esto es imposible (¿por qué?), $x_{n+1} = x_1$.]

5. Un plano corta a los lados de un polígono no plano $P_1P_2\cdots P_n$ en n puntos distintos $R_1R_2, \cdots, R_n$. Demostrar que el producto de las razones de división del Prob. 4 es $(-1)^n$.

8. Componentes rectangulares. Sean **i**, **j**, **k** un conjunto *dextrórsum* de vectores unitarios mutuamente perpendiculares. Entonces, los dedos pulgar, índice y medio de la *mano derecha*,

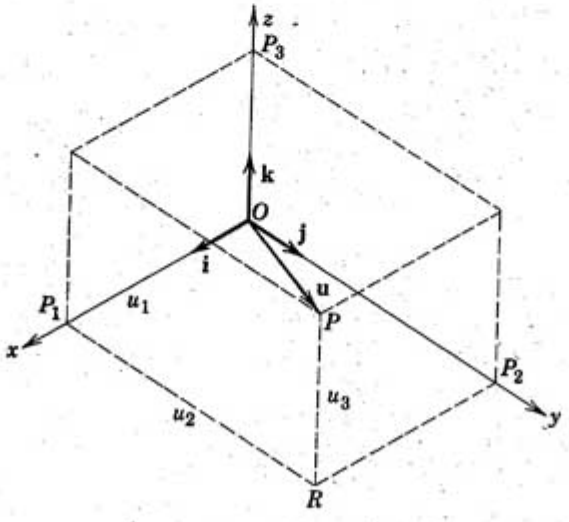


Fig. 8. Componentes rectangulares de un vector.

pueden ser colocados en las direcciones de i, j, k. † Hagamos que i, j, k partan de un origen común 0, en las direcciones positivas a lo largo del sistema de ejes rectangulares *Oxyz*.

Ahora, cualquier vector u, puede ser expresado en la forma

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \tag{1}$$

Dibújese $\overrightarrow{OP} = \mathbf{u}$, desde el origen y sean $\overrightarrow{OP}_1$, $\overrightarrow{OP}_2$, $\overrightarrow{OP}_3$ las proyecciones ortogonales de $\overrightarrow{OP}$ sobre los ejes. Entonces (Fig. 8),

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1R} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \overrightarrow{OP}_3$$

o, puesto que $\overrightarrow{OP}_1$, $\overrightarrow{OP}_2$, $\overrightarrow{OP}_3$ son múltiplos de i, j, k, obtenemos $u = \overrightarrow{OP}$ en la forma (1). Los números u_1, u_2, u_3 se llaman las *componentes rectangulares* de u. Evidentemente, u_1 es la longitud OP_1 tomada positiva o negativa según que $\overrightarrow{OP}_1$ tenga la dirección de i o de $-\mathbf{i}$ y, del triángulo rectángulo OP_1P, se ve que $u_1 = |\mathbf{u}| \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u})$, donde $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$ es el ángulo entre i y u. Así, las coordenadas rectangulares de un vector son los productos de su longitud por sus cosenos directores:

$$u_1 = |\mathbf{u}| \cos(\mathbf{i}, \mathbf{u}), \quad u_2 = |\mathbf{u}| \cos(\mathbf{j}, \mathbf{u}), \tag{2}$$
$$u_3 = |\mathbf{u}| \cos(\mathbf{k}, \mathbf{u}).$$

Por el teorema de Pitágoras,

$$(OP)^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OP_1)^2 + (OP_2)^2 + (OP_3)^2,$$

$$|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{3}$$

Substituyendo (2) en (3), obtenemos la relación

$$\cos^2(\mathbf{i}, \mathbf{u}) + \cos^2(\mathbf{j}, \mathbf{u}) + \cos^2(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = 1 \tag{4}$$

entre los cosenos directores de cualquier vector.

Las *coordenadas rectangulares* de un punto P se definen como las componentes rectangulares de su vector de posición $\overrightarrow{OP}$. Así, si

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{5}$$

† Un tornillo de rosca derecha, girado desde i hacia j, se moverá en la dirección de k.

P tiene las coordenadas rectangulares x, y, z. Puesto que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$, esto nos da

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{i} \tag{6}$$

Las componentes de $\overrightarrow{P_1P_2}$ se encuentran restando las coordenadas de P_1 de las coordenadas correspondientes de P_2.

De (1), tenemos

$$\lambda\mathbf{u} = \lambda u_1\mathbf{i} + \lambda u_2\mathbf{j} + \lambda u_3\mathbf{k}, \tag{7}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j} + (u_3 + v_3)\mathbf{k} \tag{8}$$

Algunas veces especificaremos a un vector escribiendo sus componentes dentro de un corchete: $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$. Con esta notación, (7) y (8) se convierten en

$$\lambda\mathbf{u} = [\lambda u_1\ \lambda u_2,\ \lambda u_3]$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3];$$

y, en particular

$$-\mathbf{u} = [-u_1, -u_2, -u_3]$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = [u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ u_3 - v_3].$$

Si $\mathbf{u}$ es un vector en el plano xy y θ es el ángulo $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$, entonces

$$(\mathbf{j}, \mathbf{u}) = (\mathbf{j}, \mathbf{i}) + (\mathbf{i}, \mathbf{u}) = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \frac{\pi}{2};$$

y, por lo tanto los cosenos directores de $\mathbf{u}$ son

$$\cos\theta, \quad \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Entonces, $\mathbf{u}$ tiene las componentes

$$u_1 = |\mathbf{u}|\cos\theta, \quad u_2 = |\mathbf{u}|\operatorname{sen}\theta, \quad u_3 = 0,$$

y

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}|(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta). \tag{9}$$

Ejemplo. Teoremas del seno y el coseno de la suma de dos ángulos. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores unitarios tales que los ángulos $(\mathbf{i}, \mathbf{a}) = \alpha$, $(\mathbf{i}, \mathbf{b}) = \alpha + \beta$. Entonces

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\operatorname{sen}\alpha,$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{i}\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{j}\operatorname{sen}(\alpha + \beta). \tag{i}$$

Si **b** está referido a ejes rectangulares a lo largo de

$$\mathbf{i}_1 = \alpha, \quad \mathbf{j}_1 = \mathbf{i} \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) + \mathbf{j} \operatorname{sen}(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi),$$

tenemos también

(ii) $$\mathbf{b} = \mathbf{i}_1 \cos\beta + \mathbf{j}_1 \operatorname{sen}\beta$$
$$= (\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\operatorname{sen}\alpha)\cos\beta + \{\mathbf{i}\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) + \mathbf{j}\operatorname{sen}(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi)\}\operatorname{sen}\beta$$

Igualando las componentes de **b** en (i) y en (ii), obtenemos

(iii) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{sen}\beta,$$

(iv) $$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{sen}\beta.$$

En particular, cuando $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, tenemos

$$\cos(\beta + \tfrac{1}{2}\pi) = -\operatorname{sen}\beta, \quad \operatorname{sen}(\beta + \tfrac{1}{2}\pi) = \cos\beta,$$

puesto que $\cos\pi = -1$, $\operatorname{sen}\pi = 0$; entonces

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Estos teoremas de adición, deducidos sin el auxilio de una figura, son válidos para todo valor de α y β, positivo o negativo.

9. Productos de dos vectores. Hasta ahora hemos considerado solamente los productos de vectores por escalares. Ahora definiremos dos operaciones entre vectores, conocidas como "productos" por tener algunas propiedades comunes con los productos de números. En estos productos de vectores, sin embargo, encontraremos algunas propiedades en fuerte desacuerdo con los productos de números.

En vista de que uno de estos productos es un escalar y el otro es un vector, han sido llamados *producto escalar* y *producto vectorial*, respectivamente. Las definiciones de estos nuevos productos pueden parecer sumamente arbitrarias a quien no esté familiarizado con la historia del álgebra de vectores. Nosotros presentamos esta álgebra en la forma y con la notación debida al físico y matemático norteamericano J. Willard Gibbs (1839-1903). †

† Profesor de física matemática en la Universidad de Yale. Su libro *Elements of Vector Analysis* fue impreso en privado en 1881. Un tratado más completo es *Vector Analysis*, Yale University Press, 1901, basado en las conferencias de Gibbs, escrito por el Profesor E. B. Wilson.

Es una ampliación del *álgebra de cuaternios*, adaptada a las aplicaciones en la geometría y en la física. Véase *Vector and Tensor Analysis*, de Brand, Capítulo X, para una breve reseña del álgebra de cuaternios y sus aplicaciones. En §184 se muestra cómo se originaron los productos escalar y vectorial.

10. Producto escalar. *El producto escalar de dos vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$, *que se escribe* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, *se define como el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo que forman:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{1}$$

Aquí $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ denota el ángulo más pequeño, tomado con signo positivo, que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. El producto escalar es, por lo tanto, un *número* que, para vectores *propios* (diferentes de cero), es positivo, cero o negativo, de acuerdo con que el ángulo $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sea agudo, recto u obtuso. En consecuencia, para vectores *propios*,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ implica que } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}. \tag{2}$$

Cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|, \text{ o } -|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|,$$

según que los vectores tengan la misma dirección o dirección opuesta. El "cuadrado" de $\mathbf{u}$ es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$.

De (1), se ve que

$$(-\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (-\mathbf{u}) \cdot (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

$$(\alpha\mathbf{u}) \cdot (\beta\mathbf{v}) = \alpha\beta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{3}$$

Este último resultado es obvio cuando α y β son números positivos. Los otros casos se deducen entonces de las ecuaciones precedentes.

La definición (1) muestra que la *multiplicación escalar es conmutativa:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{4}$$

En vista de que $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ no está definido (el punto solamente se usa entre *vectores*), no es necesario considerar la ley asociativa. Se observa, sin embargo, que en general $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \neq \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$.

La multiplicación escalar es distributiva con respecto a la adición:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}. \tag{5}$$

Demostración. Si l es una recta dirigida cuyo sentido está dado por el vector *unitario* $\mathbf{e}$, la proyección ortogonal de un vector $\mathbf{u}$ sobre l ($\text{proy}_l\,\mathbf{u}$) es un múltiplo numérico de $\mathbf{e}$. Este número se llama la *componente* de $\mathbf{u}$ sobre l ($\text{comp}_l\,\mathbf{u}$) y la ecuación que lo define es, por lo tanto

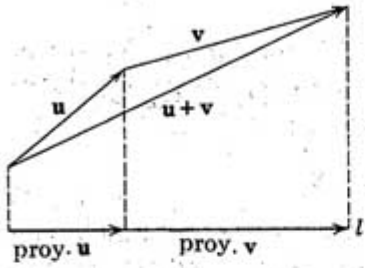


Fig. 10*a*. La proyección es distributiva.

$$\mathbf{e}\,\text{comp}_l\,\mathbf{u} = \text{proy}_l\,\mathbf{u} \tag{6}$$

Calculamos $\text{comp}_l\,\mathbf{u}$ como en §8, es decir

$$\text{comp}_l\,\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\cos(\mathbf{e},\mathbf{u}) \tag{7}$$

o, puesto que $|\mathbf{e}| = 1$,

$$\text{comp}_l\,\mathbf{u} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{u} \tag{8}$$

Más aún, puesto que (Fig. 10*a*)

$$\text{proy}_l\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \text{proy}_l\,\mathbf{u} + \text{proy}_l\,\mathbf{v} \tag{9}$$

(6) demuestra que también

$$\text{comp}_l\,(\mathbf{u}+v) = \text{comp}_l\,\mathbf{u} + \text{comp}_l\,v \tag{10}$$

Ahora, si escribimos $\mathbf{w} = |\mathbf{w}|\,\mathbf{e}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= |\mathbf{w}|\,\mathbf{e}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (3)\\
&= |\mathbf{w}|\,\text{comp}_w\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (8)\\
&= |\mathbf{w}|\,(\text{comp}_w\,\mathbf{u} + \text{comp}_w\,\mathbf{v}) && (10)\\
&= |\mathbf{w}|\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{e}\cdot\mathbf{v}) && (8)\\
&= \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}. && (3).
\end{aligned}$$

Mediante aplicaciones sucesivas de (5), podemos desarrollar el producto escalar de dos sumas de vectores, al igual que en el álgebra ordinaria. Por ejemplo

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$$

Si $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ en la ecuación

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \quad \text{o} \quad (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0 \tag{11}$$

podemos concluir, *bien que* $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0}$, *o bien que* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{c}$. Entonces, no podemos cancelar $\mathbf{c}$ en (11) para obtener $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ a menos que sepamos que $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son perpendiculares.

Puesto que $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0. \tag{12}$$

En consecuencia, si desarrollamos el producto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}),$$

obtenemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{13}$$

El producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus componentes rectangulares correspondientes.

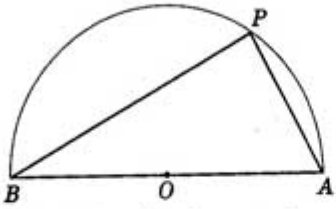


Fig. 10*b*. Ángulo recto inscrito en un semicírculo.

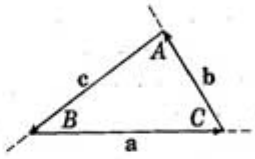


Fig. 10c. Triángulo plano.

Ejemplo 1. El ángulo (u, v) formado por dos vectores u, v, puede encontrarse a partir de (1):

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} : \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} \tag{14}$$

En el espacio, los ángulos se toman como positivos y (u, v) denota el ángulo θ más pequeño en el intervalo $0 \leqq \theta \leqq 180°$.

Entonces, cuando $\mathbf{u} = [1, 2, -2]$, $\mathbf{v} = [2, 2, 1]$,

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 + 4 - 2 = 4,$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 4/9 = 0.4444. \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 63°37'.$$

Ejemplo 2. Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$ y $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 5$, $|\mathbf{w}| = 7$, encontrar el ángulo (u, v).

Puesto que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{w}$,

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v};$$

por lo tanto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(49 - 9 - 25) = 15/2$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{15/2}{15} = \tfrac{1}{2}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 60°.$$

Ejemplo 3. *Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.*

Demostración. Sea P cualquier punto sobre el semicírculo con centro en O y con AOB como diámetro (Fig. 10*b*). Entonces

$$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{BP} = (\mathbf{p} - \mathbf{a}) : (\mathbf{p} - \mathbf{b}) = (\mathbf{p} - \mathbf{a}) : (\mathbf{p} + \mathbf{a}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0;$$

y, en consecuencia, AP y BP son perpendiculares.

Ejemplo 4. Ley de los cosenos. En el triángulo ABC, sean A, B, C los ángulos interiores y a, b, c los lados opuestos, respectivamente (Fig. 10*c*). Entonces, de $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, tenemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (b + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

o

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A,$$

puesto que el ángulo $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pi - A$. Esta es la *ley de los cosenos* para los triángulos planos.

Ejemplo 5. La identidad

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{c}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{b}) = 0$$

muestra que las alturas de un triángulo ABC concurren en un punto H, el *ortocentro del triángulo* (Fig. 10*d*), puesto que, si dos términos de esta ecuación son cero, el tercero también lo es.

Similarmente, la identidad

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\right) + (b - \mathbf{c}) \cdot \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}\right) + \\ + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{c} + \mathbf{a}}{2}\right) = 0$$

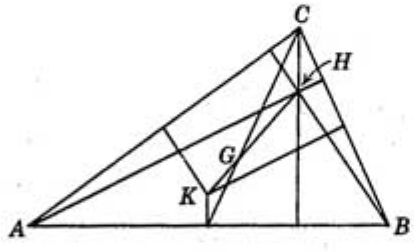


Fig. 10*d*. Recta de Euler de un triángulo.

muestra que las bisectrices perpendiculares del triángulo ABC concurren en un punto K, el *circuncentro* del triángulo.

Los términos individuales de las ecuaciones anteriores se anulan para el ortocentro H y para el circuncentro K. Por ejemplo,

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{c}) = 0,$$
$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{k} - \mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$$

Sumando éstas, obtenemos

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{h} + 2\mathbf{k} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$$

o, escribiendo $\mathbf{g} = 1/3\,(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ para el vector de posición del centro medio G del triángulo ABC, tenemos

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{h} + 2\mathbf{k} - 3\mathbf{g}) = 0.$$

Puesto que esta ecuación es válida cuando $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es reemplazada por $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$, concluimos que

$$\mathbf{h} + 2\mathbf{k} - 3\mathbf{g} = 0;$$

puesto que, si $\mathbf{h} + 2\mathbf{k} - 3\mathbf{g} \neq 0$, el vector sería perpendicular a los tres lados de ABC. *Por lo tanto, el centro medio de un triángulo está en la recta que une el ortocentro con el circuncentro y la divide en la razón de* 2/1. *Esta recta se conoce como la* recta de Euler *del triángulo.*

Ejemplo 6. Teoremas de Lagrange. Si P^* es el centroide de n puntos ponderados m_iP_i, para los cuales $\Sigma m_i = M$, tenemos los teoremas:

$$\Sigma m_i(OP_i)^2 = M(OP^*)^2 + \Sigma m_i(P^*P_i)^2, \tag{15}$$

$$\Sigma m_i m_j(P_iP_j)^2 = M\Sigma m_i(P^*P_i)^2, \tag{16}$$

donde la suma de la izquierda se toma sobre las $\frac{1}{2}n(n-1)$ combinaciones de i, j $(i \neq j)$.

Demostración de (15). Puesto que $\overrightarrow{OP}_i = \overrightarrow{OP}^* + \overrightarrow{P^*P}_i$, se tiene

$$(OP_j)^2 = \overrightarrow{OP}_j \cdot \overrightarrow{OP}_i = (OP^*)^2 + (P^*P_j)^2 + 2\overrightarrow{OP}^* : \overrightarrow{P^*P}_j.$$

Multípliquese esta ecuación por m_i y súmese sobre los n puntos. Entonces, en la derecha, la primera suma es $M(OP^*)^2$, la segunda es $\Sigma m_i(P^*P_i)^2$ y la tercera es cero, ya que $\Sigma m_i\overrightarrow{P^*P}_i = 0$ por (7.1).

Demostración de (16). Puesto que $\overrightarrow{P_iP}_j = \overrightarrow{P^*P}_j - \overrightarrow{P^*P}_i$,

$$(P_iP_j)^2 = \overrightarrow{P_iP}_j \cdot \overrightarrow{P_iP}_j = (P^*P_j)^2 + (P^*P_i)^2 - 2(\overrightarrow{P^*P}_j) : (\overrightarrow{P^*P}_i),$$

Multiplíquese esta ecuación por m_im_j y súmese desde $i, j = 1$ a n. Entonces, en la izquierda se tiene

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} = m_im_j(P_iP_j)^2 = 2\sum_{(ij)} m_im_j(P_iP_j)^2$$

donde la suma se hace sobre todas las combinaciones diferentes (ij) en las que $i \neq j$ (cuando $i = j$, entonces $P_iP_j = 0$). En la derecha, la primera y segunda sumas son iguales y juntas nos dan

$$2\sum_{j=1}^{n} m_j \sum_{i=1}^{n} m_i(P^*P_i)^2 = 2M\sum m_i(P^*P_i)^2,$$

mientras que ambos factores en la tercera se anulan por (7.1). Dividiendo por 2, obtenemos (16).

En el caso especial en que todos los pesos $m_i = 1$, se tiene $M = n$. En consecuencia, al dividir (15) por n, obtenemos

$$\text{Media de } (OP_i)^2 = (OP^*)^2 + \text{media de } (P^*P_i)^2. \tag{15}'$$

Esta ecuación es válida cuando $n \to \infty$ y puede aplicarse a conjuntos continuos de puntos si calculamos las medias por integración.

En (16) hay $\frac{1}{2}n(n-1)$ términos en la suma de la izquierda y n términos en la de la derecha, por lo tanto

$$\text{Media de } (P_iP_j)^2 = \frac{2n}{n-1}\text{ media de } (P^*P_i)^2 \tag{16}'$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, $2n/(n-1) \to 2$ y obtenemos la interesante fórmula

(17) Media de $(PP')^2 = 2$ media de $(P^*P)^2 \quad (n = \infty)$.

Esto puede ser aplicado a conjuntos continuos de puntos si calculamos las medias como integrales. Por ejemplo, para los puntos que forman una esfera de radio a con centro en O, $P^*P = r$, y

$$\text{Media de } (P^*P)^2 = \frac{1}{V}\int_0^a r^2\, dV \qquad (dV = 4\pi r^2\, dr)$$

$$= \frac{3}{4\pi a^3}\int_0^a 4\pi r^4\, dr = \frac{3}{5}a^2,$$

$$\text{Media de } (PP')^2 = \frac{6}{5}a^2.$$

11. Producto vectorial. *El producto vectorial de dos vectores* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, *escrito* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *se define como el vector*

(1) $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{e},$$

donde $\mathbf{e}$ *es un vector unitario perpendicular a* $\mathbf{u}$ *y a* $\mathbf{v}$ *y formando con ellos un conjunto dextrórsum* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}$. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, un tornillo con rosca derecha girado de $\mathbf{u}$ *hacia* $\mathbf{v}$ avanzará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, $\mathbf{e}$ no está definido, pero en este caso $\operatorname{sen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Más aún, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son nulos, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ sólo cuando $\operatorname{sen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Por lo tanto, para vectores propios

(2) $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ implica } \mathbf{u} \,||\, \mathbf{v}.$$

En particular, $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

De (1) se ve que

$$(-\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (-\mathbf{v}) = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad (-\mathbf{u}) \times (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v},$$

(3) $$(\alpha\mathbf{u}) \times (\beta\mathbf{v}) = \alpha\beta\, \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Este último resultado es obvio cuando α y β son números positivos. El otro caso se deduce de las ecuaciones precedentes.

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se intercambian en (1), los factores escalares no se alteran, pero $\mathbf{e}$ se invierte, por lo tanto

(4) $$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

La multiplicación vectorial es anticonmutativa.

Dibújense $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ desde el punto A y sea p un plano perpendicular a $\mathbf{u}$ en A (Fig. 11*a*). Entonces, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ puede formarse mediante una sucesión de tres operaciones:

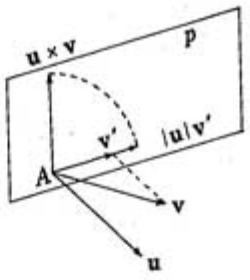


Fig. 11*a*. Producto vectorial.

(P) Proyéctese $\mathbf{v}$ sobre p y obténgase $\mathbf{v}'$;

(M) Multiplíquese $\mathbf{v}'$ por $|\mathbf{u}|$ y obténgase $|\mathbf{u}|\,\mathbf{v}'$;

(G) Gírese $|\mathbf{u}|\mathbf{v}'$ con respecto a $\mathbf{u} + 90°$.

El vector resultante es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ en magnitud, ya que $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$ sen $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y también en dirección (hacia arriba, en la figura). Indicamos este método de formar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ mediante la notación

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathrm{GMP}\mathbf{v}. \tag{5}$$

Esto significa que $\mathbf{v}$ *se proyecta*, la proyección se *multiplica* y finalmente se *gira* como se describió previamente. Ahora bien, cada uno de estos operadores es *distributivo:* operar sobre la suma de dos vectores es igual que operar con los dos vectores separadamente y sumar los resultados. En consecuencia

$$\mathrm{GMP}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathrm{GM}(\mathrm{P}\mathbf{v} + \mathrm{P}\mathbf{w}) = \mathrm{G}(\mathrm{MP}\mathbf{v} + \mathrm{MP}\mathbf{w}) = \\ = \mathrm{GMP}\mathbf{v} + \mathrm{GMP}\mathbf{w}.$$

Entonces, de (5),

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}+\mathbf{w}, \quad (\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{u} = \mathbf{v}\times\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u}. \tag{6}$$

La multiplicación vectorial es distributiva con respecto a la adición.

Por medio de aplicaciones repetidas de (6), podemos desarrollar el producto vectorial de dos sumas de vectores igual que en el álgebra ordinaria, *siempre y cuando se conserve el mismo orden de los factores.* Por ejemplo,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{d}$$

Si $\mathbf{c} \neq 0$ en la ecuación

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad \text{o} \quad (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

podemos concluir que *o bien* $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ *o bien que* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son paralelos. No se puede cancelar $\mathbf{c}$ para obtener $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, a menos que $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no sean paralelos.

La multiplicación vectorial no es asociativa, puesto que en §12 se ve que, en general, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Puesto que los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ forman un conjunto ortogonal dextrorso, tenemos las relaciones cíclicas

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}; \tag{7}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

En consecuencia, si desarrollamos el producto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}),$$

obtenemos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}. \tag{8}$$

Las componentes de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ son las determinantes formadas por las columnas 2 y 3, 3 y 1 (no 1 y 3) y 1 y 2 del esquema $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$; en consecuencia, podemos escribir

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{u} = [2, -3, 5]$, $\mathbf{v} = [-1, 4, 2]$, calculamos las componentes de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ mediante el esquema

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -26, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Así, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-26, -9, 5]$. Como comprobación, verificamos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sea perpendicular a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$: $-52 + 27 + 25 = 0$, $26 - 36 + 10 = 0$.

Un área plana A, cuyo límite haya sido trazado en un sentido definido, corresponde a un *área vectorial* $A\mathbf{e}$ normal al plano. Aquí, $\mathbf{e}$ es el vector unitario en la dirección en que un tornillo con rosca derecha avanzaría si se girase en el sentido dado. Podemos ahora interpretar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como un área vectorial; puesto que el área del paralelogramo cuyos lados son $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, es $A =$

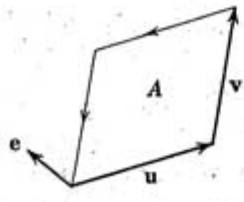


Fig. 11*b*. Área vectorial.

$= |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ sen $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y su sentido de circuito, mostrado por las flechas en la Fig. 11*b*, corresponde a la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ o $\mathbf{e}$. Así, de (1),

(10) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$ área vectorial del paralelogramo orientado $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Ejemplo 1. Distancia de un punto a un plano. Si un plano está dado por tres de sus puntos A, B, C, podemos encontrar la distancia d más corta de un punto R al plano, directamente. *La ecuación del plano no es necesaria.*

Primero, encontramos un vector normal al plano, digamos $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ y sea $\mathbf{n}$ un vector *unitario* en esa dirección. Entonces, si $\mathbf{u}$ es cualquier vector de R al plano (como $\overrightarrow{RA}$), d es numéricamente igual a la componente de u en la normal:

$$d = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{u}| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|$$

El cálculo se comprueba escogiendo $\mathbf{u}$ de otra manera, digamos $\overrightarrow{RB}$ o $\overrightarrow{RC}$.

Entonces, si el plano está dado por

$$A(2, 4, 1), \quad B(-1, 0, 1), \quad C(-1, 4, 2),$$

encontramos que

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-3, -4, 0] \times [-3, 0, 1] = [-4, 3, -12].$$

$$\mathbf{n} = [-4, 3, -12]/13$$

La distancia del punto $R(1, -2, 1)$ al plano es ahora

$$|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{RA}| = \frac{[-4, 3, -12] \cdot [1, 6, 0]}{13} = \frac{14}{13}.$$

Para comprobar, calcúlese $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{RB}$.

Ejemplo 2. Distancia de un punto a una recta. Si la recta está dada por dos de sus puntos A, B, podemos encontrar la distancia d más corta de un punto R a la recta, directamente. *Las ecuaciones de la recta no son necesarias.*

Primero, encontramos un vector *unitario* $\mathbf{e}$ desde $\overrightarrow{AB}$ a lo largo de la recta. Entonces, si $\mathbf{u}$ es cualquier vector desde R a la recta (como $\overrightarrow{RA}$),

$$d = |\mathbf{u}| \text{ sen } (\mathbf{u}, \mathbf{e}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{e}|.$$

El cálculo se comprueba escogiendo $\mathbf{u}$ de otra manera, digamos $\overrightarrow{RB}$. Entonces, si la recta está dada por $A(2, 3, 0)$, $B(-1, 2, 4)$,

$$\overrightarrow{AB} = [-3, -1, 4], \quad \mathbf{e} = [-3, -1, 4]/\sqrt{26}$$

Para encontrar la distancia del punto $R(3, 1, -1)$ a la recta, calculamos

$$\overrightarrow{RA} \times \mathbf{e} = \frac{[-1, 2, 1] \times [-3, -1, 4]}{\sqrt{26}} = \frac{[9, 1, 7]}{\sqrt{26}},$$

$$|\overrightarrow{RA} \times \mathbf{e}| = \sqrt{\frac{81 + 1 + 49}{26}} = \sqrt{\frac{131}{26}} = 2.245.$$

Para comprobar, calcúlese $|\overrightarrow{RB} \times \mathbf{e}|$.

Ejemplo 3. Distancia entre dos rectas. Si dos rectas no paralelas están dadas por los puntos A, B y C, D, podemos encontrar la distancia d más corta entre ellas, directamente.

Primero, encontramos un vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$ que sea perpendicular a ambas rectas y sea $\mathbf{n}$ un vector *unitario* en esa dirección. Entonces, si $\mathbf{u}$ es cualquier vector desde una recta a la otra (como $\overrightarrow{AC}$), d es numéricamente igual a la componente de $\mathbf{u}$ sobre la perpendicular común:

$$d = |\text{comp}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|.$$

Entonces, sean las rectas AB, CD dadas por los puntos

$$A(1, -2, -1),\ B(4, 0, -3);\quad C(1, 2, -1),\ D(2, -4, -5).$$

Tenemos que

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = [3, 2, -2] \times [1, -6, -4] = 10[-2, 1, -2],$$

$$\mathbf{n} = [-2, 1, -2]/3.$$

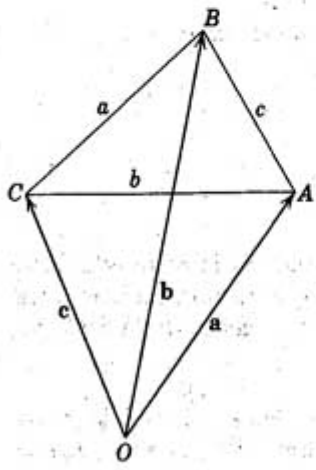


Fig. 11c. Triángulo definido mediante vectores de posición.

Ahora, la distancia d más corta entre las rectas, es

$$|\mathbf{n} : AC| = \frac{[-2, 1, -2] : [0, 4, 0]}{3} = \frac{4}{3}.$$

Para comprobar, calcúlese $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Ejemplo 4. En el triángulo ABC (Fig. 11c), los vectores de posición de A, B, C son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y sus lados $a = |\mathbf{c} - \mathbf{b}|$, $b = |\mathbf{a} - \mathbf{c}|$, $c = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Entonces

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = bc \operatorname{sen} A\, \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal al plano ABC. Pero, por la ley distributiva,

$$bc \operatorname{sen} A\, \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \tag{11}$$

De (11) podemos hacer una serie de deducciones.

(i) El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ es normal al plano ABC.

(ii) El área del triángulo ABC es

$$\tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|.$$

(iii) Al dividir (11) por abc, encontramos que sen A/a es igual a una expresión que no se altera por permutaciones cíclicas de sus letras, Así,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Esta es la *ley de los senos* para triángulos planos.

Ejemplo 5. Las ecuaciones

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0), \tag{12}$$

en las que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, α son dados, tiene la solución única

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \alpha\mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \tag{13}$$

De $\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, tenemos

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{r} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Entonces, la solución, si existe alguna, está dada por (13). La substitución directa de (13) en (12) verifica la solución.

PROBLEMAS

1. Encontrar el ángulo que forman los vectores:

(*a*) $[1, 1, 0]$, $[1, 0, 1]$; (*b*) $[2, -1, 3]$, $[-1, 4, 2]$;

(*c*) $[1, 1, 0]$, $[-1, -1, 0]$; (*d*) $[1, 1, 1]$, $[1, 1, -1]$;

(*e*) $[a, b, c]$, $[b, c, a]$, $[c, a, b]$.

2. Demostrar que $\mathbf{a} = [2, 3, -1]$, $\mathbf{b} = [1, 1, 5]$, $\mathbf{c} = [16, -11, -1]$, forman un conjunto derecho de vectores mutuamente ortogonales.

3. Encontrar la distancia perpendicular de $P(1, -2, 1)$ al plano ABC, dados los puntos

$$A(2, 4, 1), \quad B(-1, 0, 1), \quad C(-1, 4, 2).$$

4. Encontrar la distancia más corta entre las rectas AB, CD, dados los puntos

$$A(1, 2, 3), \quad B(-1, 0, 2); \quad C(0, 1, 7), \quad D(2, 0, 5).$$

5. Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

6. Si los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ son iguales en longitud, demostrar que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH},$$

donde H es el ortocentro del triángulo ABC (punto de intersección de las alturas). [Multiplíquese escalarmente $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{h}$ por $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$, en turno.]

7. Demostrar la *desigualdad de Schwarz*:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

siendo válido el signo de igual sólo cuando $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$.

8. Si A, B, C, D son cuatro puntos en el espacio, demostrar que

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}$$

es independiente de D.

9. En el triángulo ABC (lados opuestos a, b, c), el punto R divide a BC en la razón $\lambda/1$. Demostrar que

$$(AR)^2 = \frac{c^2+\lambda b^2}{1+\lambda} - \frac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}$$

10. Una cara de un poliedro, de área A, se dice que tiene el área vectorial $A\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a A y con dirección hacia afuera. Demostrar que las cuatro caras de un tetraedro $ABCD$ tienen áreas vectoriales tales que su suma es cero.

[Si el circuito ABC está en sentido contrario a las manecillas del reloj visto desde afuera, la cara ABC tiene el área vectorial

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}).]$$

11. Si A, B, C, D son los vértices de un cuadrado en ese mismo orden, demostrar que

$(OA)^2+(OC^2=(OB)^2+(OD)^2$ para cualquier O. [Usar (10.15′).]

12. Si P y P' son puntos en la superficie de una esfera de radio a, demostrar que

$$\text{Media de } (PP')^2 = 2a^2$$

13. Si r es el radio de una esfera circunscrita en un tetraedro regular de lado a, demostrar que $r^2 = 3a^2/8$. [Úsese (10.16′).]

14. Si P^* y Q^* son los centros medios de p puntos P_i y q puntos Q_j, respectivamente, demostrar que

$$\text{Media de } (P_iQ_j)^2 = \text{Media de } (P^*P_i)^2 + \\ + \text{Media de } (Q^*Q_j)^2 + (P^*Q^*)^2.$$

15. Los puntos A', B', C' dividen a los lados BC, CA, AB del triángulo ABC en la razón de $\frac{1}{2}$. Los pares de rectas (AA', BB'), (BB', CC'), (CC', AA') se intersectan en P, Q, R, respectivamente. Demostrar que el área del triángulo PQR es $1/7$ del área de ABC.

$$[\text{Área vectorial } PQR = \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}\times\mathbf{q}+\mathbf{q}\times\mathbf{r}+\mathbf{r}\times\mathbf{p}).]$$

16. Demostrar que

$$|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2+|\mathbf{c}+\mathbf{a}|^2+|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2.$$

17. Demostrar que

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| - |\mathbf{b} + \mathbf{c}| - |\mathbf{c} + \mathbf{a}| - |\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| \geqq 0.$$

[El miembro izquierdo es igual a

$$\{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| - |\mathbf{a} + \mathbf{b}|\}\left\{1 - \frac{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|}\right\} + \text{cycl},$$

en donde cada llave es ≥ 0.]

18. Si ABC es un triángulo esférico sobre una esfera unitaria con respecto a O y se tiene que $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, el vector $\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ pasa por cualquier punto P de la esfera, de acuerdo con una elección conveniente de x, y, z. Demostrar que los vectores

$$\mathbf{u} = y\mathbf{b} + z\mathbf{c}, \quad \mathbf{v} = z\mathbf{c} + x\mathbf{a}, \quad \mathbf{w} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

pasan por los puntos U, V, W donde los círculos máximos PA, PB, PC cortan a los lados BC, CA, AB del triángulo y que

$$\frac{\operatorname{sen}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \operatorname{sen}(\mathbf{c}, \mathbf{v}) \operatorname{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\operatorname{sen}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \operatorname{sen}(\mathbf{v}, \mathbf{a}) \operatorname{sen}(\mathbf{w}, \mathbf{b})} = 1$$

(*Teorema de Ceva* para triángulos esféricos).

[De $\mathbf{w} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ y $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, tenemos

$$\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{w}}{y} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{b}}{x}, \quad \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\operatorname{sen}(\mathbf{w}, \mathbf{b})} = \frac{y}{x},$$

tomando en cuenta los signos.]

12. Triple producto vectorial. El vector $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y por lo tanto coplanar con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Por lo tanto (§4),

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}.$$

Pero, puesto que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ es también perpendicular a $\mathbf{w}$,

$$\alpha\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Todos los números α, β, que satisfagan esta ecuación deben ser de la forma $\alpha = -\lambda\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\beta = \lambda\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, donde λ es arbitraria. Entonces, tenemos

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \lambda\,\{(\mathbf{u} : \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} : \mathbf{w})\mathbf{u}\}.$$

A fin de determinar λ, usamos una base especial en la que $\mathbf{i}$ es colineal con $\mathbf{u}$, $\mathbf{j}$ coplanar con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$; entonces

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}.$$

Substituyendo estos valores, obtenemos, después de un simple cálculo, $\lambda = 1$. Tenemos, por lo tanto, las importantes fórmulas de desarrollo

$$(1) \qquad \begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \\ \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}. \end{aligned}$$

En los miembros izquierdos de (1), uno de los vectores entre paréntesis es *adyacente* al vector exterior, el otro *no lo es*. Los miembros derechos pueden recordarse de la siguiente manera

(punto lejano exterior) adyacente − (punto adyacente exterior) lejano.

En general, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, ya que el primero es coplanar con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y el último con $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. *La multiplicación vectorial no es asociativa.*

De (1) vemos que la suma de un triple producto vectorial con sus dos permutaciones cíclicas es cero

$$(2) \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0.$$

Si l es una recta dirigida coincidente con el vector unitario $\mathbf{e}$, podemos expresar cualquier vector $\mathbf{u}$ como la suma de sus proyecciones ortogonales sobre l y sobre un plano p perpendicular a l:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \text{proy}_l\, \mathbf{u} &= \mathbf{e}\, \text{comp}_l\, \mathbf{u} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})\mathbf{e}, \qquad (10.8), \\ \text{proy}_p\, \mathbf{u} &= \mathbf{u} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})\mathbf{e} = \mathbf{e} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{e}). \end{aligned}$$

13. Triple producto escalar. Sean los vectores no coplanares

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OU}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OV}, \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{OW}$$

dibujados desde un origen común O. Entonces $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ forman un conjunto *dextrorso* o *sinistrorso* de acuerdo con que el circuito alrededor del triángulo UVW, *visto desde* O, esté en el mismo sentido que las manecillas del reloj, o en sentido contrario. * En la Fig. 13*a*, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, forman un conjunto dextrorso, ya que el circuito UVW está en sentido contrario al de

* Nuestra definición previa de un conjunto dextrorso en §8 es aplicable a conjuntos ortogonales tales como $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Esta definición, más general, demuestra también que $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ forman un conjunto dextrorso.

las manecillas del reloj, visto por el lector y por lo tanto en el mismo sentido (el de las manecillas del reloj), visto desde el el origen (que está detrás del plano *UVW*). El conjunto **u**, **w**, **v** es sinistrorso.

Considérese ahora el producto escalar de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y **w**, escrito coorigen (que está detrás del plamo $\mathbf{u} \times \mathbf{v} : \mathbf{w}$ o [uvw]. No existe ninguna ambigüedad en la omisión de los paréntesis, ya que $\mathbf{u} \times \times (\mathbf{v} : \mathbf{w})$ no está definido (la cruz solamente se usa entre *vectores*). Veremos también que las posiciones del punto y de la cruz no tienen importancia.

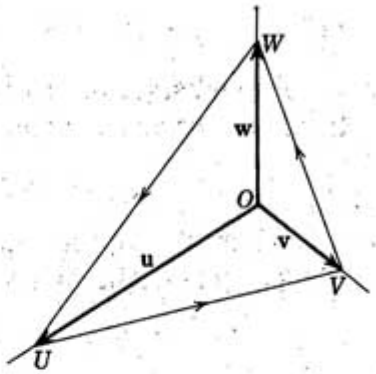


Fig. 13*a*. Un conjunto dextrorso: u, v, w.

TEOREMA. *El producto* $\mathbf{u} \times \times \mathbf{v} : \mathbf{w}$ *es numéricamente igual al volumen V de un paralelepípedo que tenga a* **u**, **v** *y* **w** *como aristas concurrentes. Su signo es positivo o negativo de acuerdo con que* **u**, **v** *y* **w** *formen un conjunto dextrorso o sinistrorso, respectivamente.*

Demostración. Podemos escribir el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = A\mathbf{n}$, donde

$$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

es el área del paralelogramo que tiene a **u** y a **v** como lados adyacentes y **n** es un vector unitario perpendicular a **u** y a **v**, en la dirección en la que un tornillo con rosca derecha avanzaría al girarlo desde **u** hacia **v**. Cuando el conjunto **u**, **v**, **w** es dextrorso (como en la Fig. 13*b*), el ángulo $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{w})$, es agudo y, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = A\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \\ = A|\mathbf{w}| \cos\theta = Ah = V,$$

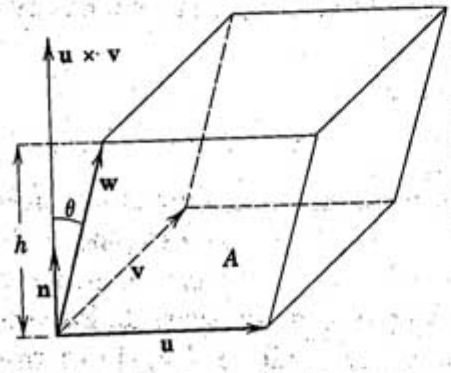


Fig. 13*b*. Producto paralelepípedo.

donde h es la altura del paralelepípedo. Cuando el conjunto **u**, **v**, **w** es sinistrorso, θ es obtuso, cos θ es negativo y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -V$.

Teniendo en cuenta el significado geométrico del triple producto escalar, lo llamaremos *producto paralelepípedo.* †

El carácter dextrorso o sinistrorso de un conjunto **u**, **v**, **w** no se altera por un cambio cíclico en su orden. Entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{1}$$

Sin embargo, un conjunto dextrorso se convierte en sinistrorso y viceversa, cuando el orden cíclico se cambia:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = -\,\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \tag{2}$$

Así, si el conjunto **u**, **v**, **w** es dextrorso, los productos en (1) son todos iguales a V, mientras que los productos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

son iguales a $-V$.

Si **u**, **v**, **w** son vectores propios, $V = 0$ cuando y sólo cuando los vectores son coplanares (paralelos al mismo plano). Por lo tanto, para vectores propios

(3) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ implica que **u**, **v**, **w** son coplanares.

En particular, un producto paralelepípedo que contiene dos vectores paralelos es nulo, por ejemplo $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

El valor de un producto paralelepípedo no se altera por intercambio del punto y la cruz. Ya que, de (1),

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} \tag{4}$$

debido a que la multiplicación escalar es conmutativa. Frecuentemente se usa la notación [**uvw**] para el producto paralelepípedo, ya que la omisión del punto y de la cruz no causa ambigüedad.

De (10.3) y (11.3), tenemos

$$(\alpha\mathbf{u}) \times (\beta\mathbf{v}) \cdot (\gamma\mathbf{w}) = \alpha\beta\gamma\, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \tag{5}$$

Finalmente, la ley distributiva para los productos escalares y vectoriales demuestra que un producto paralelepípedo de sumas de vectores puede desarrollarse de la misma manera que en el álgebra ordinaria, siempre y cuando el orden de los vectores que aparecen como factores no se altere. Así, si desarrollamos el producto $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ cuando los vectores están refe-

† El nombre "box product" ha sido propuesto por J. H. Taylor, *Vector Analysis*, Prentice-Hall, 1939, p. 46.

ridos a la base i, j, k, obtenemos 27 términos, de los cuales se anulan todos menos 6 por tener productos paralelepípedos con dos o tres vectores iguales. Los 6 términos restantes son los que contienen

$$[ijk] = [jki] = [kij] = 1, \quad [ikj] = [kji] = [jik] = -1,$$

y constituyen el desarrollo del determinante

$$[\mathbf{uvw}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Este resultado es también inmediato de (11.8).

PROBLEMAS

1. Si $\mathbf{u} = [-1, 0, 2]$, $\mathbf{v} = [2, 1, -1]$, $\mathbf{w} = [1, 2, -2]$, calcular

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$;
(*b*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$;
(*c*) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u}$, $(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$, y encontrar su suma.
(*d*) Verificar los resultados de (*c*) usando (12.1).

2. Dados los puntos $A(3, 2, 1)$, $B(2, 3 - 1)$, $C(-1, 2, 3)$, encontrar

(*a*) el área del triángulo ABC;
(*b*) la distancia p de O al plano ABC;
(*c*) el volumen del tetraedro $OABC$;
(*d*) el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son OA, OB, OC.

14. Productos de cuatro vectores. Consideremos primero el producto escalar $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. Si intercambiamos la primera cruz y el primer punto, obtenemos $\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}$ y, puesto que

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}, \tag{12.1},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \tag{1}$$

Esta es la *identidad de Lagrange* y puede escribirse también

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}. \tag{1}'$$

El caso especial

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \tag{2}$$

también es importante.

Pasamos ahora al producto vectorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. Si lo desarrollamos como el triple producto de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ mediante (12.1),

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{acd}]\mathbf{b} - [\mathbf{bcd}]\mathbf{a}. \tag{3}$$

Pero, si lo desarrollamos como el triple producto de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\mathbf{d}. \tag{4}$$

Igualando los miembros derechos de (3) y (4), obtenemos una ecuación que relaciona a cuatro vectores cualesquiera:

$$\mathbf{a}[\mathbf{bcd}] - \mathbf{b}[\mathbf{cda}] + \mathbf{c}[\mathbf{dab}] - \mathbf{d}[\mathbf{abc}] = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Cuando $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son no coplanares, $[\mathbf{abc}] \neq 0$ y la fórmula

$$[\mathbf{abc}]\mathbf{d} = [\mathbf{dbc}]\mathbf{a} + [\mathbf{adc}]\mathbf{b} + [\mathbf{abd}]\mathbf{c} \tag{6}$$

nos da a $\mathbf{d}$ explícitamente en términos de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Esta es una solución analítica del problema resuelto geométricamente en §4.

Ejemplo. Trigonometría esférica. Los vectores unitarios $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, definen un triángulo esférico ABC sobre una esfera de radio unitario con centro en O. Sea además $[\mathbf{abc}] > 0$. Denotemos con α, β, γ, a los lados (arcos de círculos máximos) opuestos a los ángulos (diedros) interiores A, B, C y sean todos los lados y ángulos menores que $< \pi$. Ahora tenemos

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \cos\alpha, \qquad \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \cos\beta, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos\gamma; \tag{7}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{a}', \qquad \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{b}', \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \operatorname{sen}\gamma\,\mathbf{c}'. \tag{8}$$

Aquí $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ son vectores unitarios normales a los planos BOC, COA, AOB, respectivamente (Fig. 14) y se incluyen los ángulos

$$(\mathbf{b}', \mathbf{c}') = \pi - A = \alpha', \qquad (\mathbf{c}', \mathbf{a}') = \pi - B = \beta', \qquad (\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \pi - C = \gamma'.$$

Así, α', β', γ', son los ángulos diedros exteriores en A, B, C. Más aún,

$$\mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma} = \frac{[\mathbf{abc}]}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}\,\mathbf{a},$$

un múltiplo *positivo* de $\mathbf{a}$. Entonces, tenemos las ecuaciones

$$\mathbf{b}' \cdot \mathbf{c}' = \cos\alpha', \qquad \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a}' = \cos\beta', \qquad \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = \cos\gamma'; \tag{9}$$

$$\mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = \operatorname{sen}\alpha'\mathbf{a}, \qquad \mathbf{c}' \times \mathbf{a}' = \operatorname{sen}\beta'\mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \operatorname{sen}\gamma'\mathbf{c}. \tag{10}$$

Luego, existe completa reciprocidad entre los conjuntos $(\alpha, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ y $(\alpha', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$ y también entre los triángulos esféricos ABC y $A'B'C'$ que determinan. Mientras que ABC tiene a α, β, γ, como lados y α', β', γ', como ángulos exteriores, $A'B'C'$ tiene α', β', γ', como lados y a α, β, γ, como ángulos exteriores. Puesto que los vértices A', B', C' son los polos de los lados BC, CA, AB y viceversa, los triángulos ABC y $A'B'C'$ se llaman *polares*.

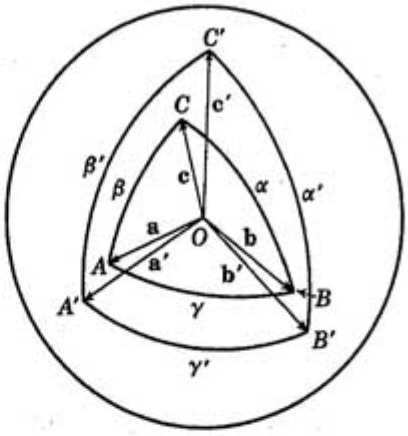


Fig. 14. Triángulo esférico.

De (8) y (10), tenemos

$$[\mathbf{abc}] = \operatorname{sen}\alpha\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \operatorname{sen}\beta\, \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \operatorname{sen}\gamma\, \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}',$$

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] = \operatorname{sen}\alpha'\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \operatorname{sen}\beta'\, \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \operatorname{sen}\gamma'\, \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}';$$

por lo tanto, al dividir, obtenemos la *ley de los senos* para triángulos esféricos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha'} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta'} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\gamma'}. \tag{11}$$

De (8), tenemos

$$\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma\, \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}' = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}\cdot\mathbf{c};$$

y, por lo tanto, de (7) y (9), obtenemos la *ley de los cosenos* para el triángulo esférico ABC:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos\alpha'. \tag{12}$$

Para triángulos polares, esto se convierte en

$$\cos\alpha' = \cos\beta'\cos\gamma' - \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\gamma' \cos\alpha. \tag{13}$$

Por supuesto, α, β, γ, pueden permutarse cíclicamente en (12) y en (13).

Puesto que α', β', γ', son ángulos exteriores, $\alpha' = \pi - A$, $\beta' = \pi - B$, $\gamma' = \pi - C$. Por lo tanto, las leyes de los senos y de los cosenos, pueden escribirse así:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}A} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}B} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}C}, \tag{11}'$$

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos A, \tag{12}'$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos\alpha. \tag{13}'$$

En esta versión de la ley de los cosenos, se pierde la analogía estructural de (12) y de (13).

PROBLEMAS

Demostrar las fórmulas

1. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = [\mathbf{abc}]^2$.

2. $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = 0$.

3. $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = -2[\mathbf{abc}]\mathbf{d}$.

4. $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + (\mathbf{b}-\mathbf{d})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) + (\mathbf{c}-\mathbf{d})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$.

5. $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + (\mathbf{b}-\mathbf{d})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) + (\mathbf{c}-\mathbf{d})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} + \mathbf{c}\times\mathbf{a})$.

6. Demostrar que $(\alpha \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ cuando y sólo cuando $(\mathbf{c} \times \alpha) \times \mathbf{b} = 0$.

7. Encontrar los ángulos interiores A, B, C, en el triángulo esférico ABC, cuando

(i) $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$;

(ii) $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, $\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

Comprobar por medio de la ley de los senos.

8. Si $C = \pi/2$ en el triángulo esférico ABC, demostrar que

$$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}, \qquad \operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma};$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} B}, \qquad \cos\beta = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} A};$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta = \cot A \cot B,$$

en donde A, B, C, son ángulos interiores.

9. Demostrar que un triángulo esférico equilátero es equiángulo y que $\cos\alpha + \cos\alpha' + \cos\alpha\cos\alpha' = 0$.

10. Demostrar la *fórmula de Herón* para el área de un triángulo plano cuyos lados son a, b, c:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{donde } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

[De $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$, $c^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; entonces

$$4A^2 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = a^2b^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = (ab + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(ab - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).]$$

15. Bases recíprocas. A un conjunto de tres vectores no coplanares lo llamaremos una *base* en el espacio de tres dimensiones, ya que *todo* vector puede expresarse linealmente en

términos de ellos (§4). † Así, si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, forman una base $[\mathbf{abc}] \neq 0$, y podemos expresar a cualquier vector $\mathbf{d}$ como

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c},$$

donde los números α, β, γ, se dan explícitamente en (14.6).

Sean ahora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, una base en el espacio tridimensional, entonces $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] \neq 0$. Procederemos ahora a definir una segunda base $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, íntimamente relacionada con la primera. Aquí los índices no significan exponente, sino meramente son una identificación.

DEFINICIÓN. Dos bases $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, se llaman *recíprocas*, cuando satisfacen las nueve ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 = 0, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^3 = 0,\\
&\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^1 = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^3 = 0,\\
&\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^1 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^2 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^3 = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Mediante el uso de la *delta de Kronecker* δ_i^j, definida como sigue

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{donde } i = j \\ 0 & \text{donde } i \neq j, \end{cases} \tag{2}$$

las ecuaciones (1) se reducen a

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Consideremos las tres ecuaciones en la primera columna de (1). La segunda y la tercera establecen que $\mathbf{e}^1$ es perpendicular a $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$; esto es, paralelas a $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$. Por lo tanto, $\mathbf{e}^1 = \lambda\, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ y, de la primera ecuación, tenemos $1 = \lambda\, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$. Así, obtenemos

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, \qquad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, \tag{4}$$

derivándose $\mathbf{e}^2$ y $\mathbf{e}^3$ de $\mathbf{e}^1$ por permutación cíclica. De la simetría de las ecuaciones (1) en los dos conjuntos $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$, tenemos también

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}, \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]}. \tag{5}$$

† Dos vectores no paralelos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0)$ forman una base para todos los vectores en el plano.

Así, cualquier base se expresa en términos de la otra exactamente con las mismas fórmulas.

De (4) y (5), tenemos

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\,[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]} = \frac{1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\,[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3]},$$

usando (14.1) y las ecuaciones (1). Por lo tanto

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\,[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3] = 1, \tag{6}$$

una ecuación que justifica más ampliamente el nombre de *recíprocos* que se aplica a los *conjuntos*. Puesto que los productos paralelepipédicos en (6) deben tener el mismo signo, una base y su recíproca son ambas dextrorsas o ambas sinistrorsas.

Dividiendo la identidad

$$\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$$

por $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]$, obtenemos la relación

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}^3 = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Cuando una base y su recíproca son idénticas, $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ y las ecuaciones (3) dan

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1, \qquad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0.$$

Estas ecuaciones caracterizan a una terna ortogonal de vectores unitarios, de donde:

Una base es recíproca consigo misma cuando y sólo cuando consta de una terna de vectores unitarios mutuamente ortogonales.

Dicha terna será dextrorsa si $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = 1$ y sinistrorsa si $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = -1$. Así, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$, son bases típicas recíprocas consigo mismas. La *totalidad* de tales bases se obtiene girando estos tipos a través del origen con respecto a los ejes.

Podemos ahora resolver el problema de expresar un vector $\mathbf{u}$ en términos de una base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Si escribimos

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$$

(los índices superiores no indican exponentes) y multiplicamos escalarmente esta ecuación sucesivamente por $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, encontramos

$$u^i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Análogamente, si escribimos

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}^1 + u_2\mathbf{e}^2 + u_3\mathbf{e}^3,$$

encontramos

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Cuando la base es recíproca consigo misma,

$$u^i = u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{u}| \cos (\mathbf{e}_i, \mathbf{u}),$$

y así obtenemos las componentes de (8.2). Para una base arbitraria, llamaremos también a los tres escalares

$$\left.\begin{aligned} u^i &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i \\ u_i &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}\right\} \textit{componentes} \text{ de } \mathbf{u} \text{ para la base } \left\{\begin{matrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}^i \end{matrix}\right. .$$

Ahora los vectores de base no son en general vectores *unitarios* (como **i**, **j**, **k**), pero las *fórmulas* para las componentes generales son análogas a las que se usan para componentes rectangulares:

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}, \qquad u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{j}, \qquad u_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}. \tag{10}$$

Con una base recíproca consigo misma las diferencias implicadas por el uso de los índices superiores e inferiores desaparecen y bastará usar un subíndice.

PROBLEMAS

1. Encontrar el conjunto de vectores recíproco a

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0], \qquad \mathbf{e}_2 = [1, 1, 0], \qquad \mathbf{e}_3 = [1, 1, 1].$$

Encontrar las componentes de $\mathbf{u} = [1, 2, 3]$, relativas a las bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, y $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$, y verificar que $|\mathbf{u}|^2 = u^1u_1 + u^2u_2 + u^3u_3$.

2. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, son vectores en el plano xy, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \lambda\mathbf{k}$. Demostrar que el conjunto recíproco a

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{k} \quad \text{is} \quad \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{k}}{\lambda}, \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}}{\lambda}, \mathbf{k}.$$

3. Si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, es un conjunto de vectores mutuamente ortogonales, demostrar que el conjunto recíproco es $\mathbf{e}_1/|\mathbf{e}_1|^2$, $\mathbf{e}_2/|\mathbf{e}_2|^2$, $\mathbf{e}_3/|\mathbf{e}_3|^2$.

4. Si los conjuntos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, y $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$, son recíprocos, demostrar que los siguientes conjuntos lo son también:

(i) $\alpha\mathbf{e}_1, \beta\mathbf{e}_2, \gamma\mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}^1/\alpha, \mathbf{e}^2/\beta, \mathbf{e}^3/\gamma$;
(ii) $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2$.

5. Encontrar el conjunto recíproco de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

6. Resolver las ecuaciones para $\mathbf{r}$ si $[\mathbf{abc}] \neq 0$:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \beta, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = \gamma.$$

16. Bases generales. Con una base general $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, es conveniente expresar los vectores en dos formas:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 = [u^1, u^2, u^3] & (1) \\ u_1\mathbf{e}^1 + u_2\mathbf{e}^2 + u_3\mathbf{e}^3 = [u_1, u_2, u_3]. & (2) \end{cases}$$

Para sumar dichos vectores o multiplicarlos por números, tenemos

$$\lambda\mathbf{u} = [\lambda u^1, \lambda u^2, \lambda u^3], \tag{3}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3], \tag{4}$$

de la misma manera que en §8.

A fin de conservar la simplicidad de la fórmula (10.13) para $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ debemos referir los vectores a bases diferentes que sean recíprocas. Así, si desarrollamos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} (u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3) \cdot (v_1\mathbf{e}^1 + v_2\mathbf{e}^2 + v_3\mathbf{e}^3) \\ (u_1\mathbf{e}^1 + u_2\mathbf{e}^2 + u_3\mathbf{e}^3) \cdot (v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3) \end{cases}$$

y usamos las relaciones $\mathbf{e}_i : \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, encontramos que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} u^1v_1 + u^2v_2 + u^3v_3 \\ u_1v^1 + u_2v^2 + u_3v^3. \end{cases} \tag{5}$$

Al calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, referimos ambos vectores a la misma base. Tomando $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, como base, tenemos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}^1 + u_2\mathbf{e}^2 + u_3\mathbf{e}^3) \times (v_1\mathbf{e}^1 + v_2\mathbf{e}^2 + v_3\mathbf{e}^3)$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2.$$

Las ecuaciones (15.5) dan ahora

$$\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, \qquad \mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}, \qquad \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}.$$

Con estos valores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ asume la compacta forma determinante

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

análoga a (11.9).

Si multiplicamos escalarmente (6) por $\mathbf{w}$ y notamos que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i = w_i$, obtenemos un determinante en el miembro derecho con w_1, w_2, w_3, en la primera fila. Esto puede escribirse también así:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

análoga a (13.6).

Cuando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están referidos a la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, las fórmulas (6) y (7) tienen precisamente la misma forma con los subíndices *arriba*. Con las bases recíprocas consigo mismas $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $[\mathbf{ijk}] = 1$, y obtenemos nuestros resultados previos.

Si referimos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, a la base $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, tenemos

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \qquad u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}, \qquad u_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{c},$$

etc., y (7) nos da la fórmula

$$[\mathbf{uvw}][\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Si referimos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, y $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, a la base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, el miembro izquierdo de (8) se convierte en un producto de determinantes:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

y (8) es equivalente a la regla de "línea-columna" para la multiplicación de determinantes.

17. Ecuaciones de la recta y del plano. Una línea recta que pase por el punto R_1 y que sea paralela al vector $\mathbf{a}$ contiene solamente los puntos R para los cuales $\overrightarrow{R_1R}$ es paralelo a $\mathbf{a}$. Por lo tanto, su ecuación es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, o, escribiendo $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a} = \mathbf{a}_0$,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}_0. \tag{1}$$

Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_0$ deben satisfacer la relación

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_0 = 0. \tag{2}$$

Puesto que ellos determinan a la recta $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, se llaman coordenadas de la recta, o *coordenadas de Plücker* de la recta. Cuando el origen se desplaza de O a Q, $\mathbf{a}_0$ cambia de

$$\mathbf{a}_O = \vec{OR}_1 \times \mathbf{a} \quad \text{a} \quad \mathbf{a}_Q = \vec{QR}_1 \times \mathbf{a};$$

y, puesto que $\vec{QR}_1 = \vec{OR}_1 - \vec{OQ}$, obtenemos la *fórmula de desplazamiento*

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_O - \vec{OQ} \times \mathbf{a}. \tag{3}$$

Las coordenadas de Plücker son *homogéneas*, es decir, $(\lambda\mathbf{a}, \lambda\mathbf{a}_0)$ determinan la misma recta que $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, puesto que la ecuación (1) no se altera. Por lo tanto, una recta está dada por las razones de seis números (las componentes de $\mathbf{a}$ y de $\mathbf{a}_0$) conectadas por una relación $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_0 = 0)$ y en consecuencia depende de *cuatro* números independientes. Esto se expresa frecuentemente diciendo: *existen* ∞^4 *rectas en el espacio.*

Un plano que pase por el punto R_1 y sea perpendicular al vector $\mathbf{a}$ contiene solamente a los puntos R para los cuales R_1R sea perpendicular a $\mathbf{a}$. Por lo tanto, su ecuación es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{a} = 0$; o, escribiendo $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{a} = \alpha_O$,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha_O. \tag{4}$$

Puesto que $\mathbf{a}$ y α_O determinan al plano $(\mathbf{a}, \alpha_O)$ se llaman coordenadas del plano. Cuando el origen se desplaza de O a Q, α_O cambia de

$$\alpha_O = \vec{OR}_1 \cdot \mathbf{a} \quad \text{a} \quad \alpha_Q = \vec{QR}_1 \cdot \mathbf{a};$$

y, puesto que $\vec{QR}_1 = \vec{OR}_1 - \vec{OQ}$, tenemos la *fórmula de desplazamiento*

$$\alpha_Q = \alpha_O - \vec{OQ} \cdot \mathbf{a}. \tag{5}$$

Estas coordenadas son también homogéneas, puesto que $(\lambda\mathbf{a}, \lambda\alpha_O)$ determina el mismo plano que $(\mathbf{a}, \alpha_O)$, ya que la ecuación (4) no se altera. Así, un plano está dado por las razones de cuatro números (las componentes de $\mathbf{a}$ y α_O) y por lo tanto depende de *tres* números independientes. *Existen* ∞^3 *planos en el espacio.*

Un punto R está dado por su vector de posición $\mathbf{r} = \vec{OR}$. Si escribimos $\mathbf{r} = \mathbf{a}_O/\alpha$, podemos tomar a $(\alpha, \mathbf{a}_O)$ como las coordenadas homogéneas de un punto cuya "ecuación" es

$$\alpha\mathbf{r} = \mathbf{a}_O. \tag{6}$$

Cuando el origen se desplaza de O a Q, $\mathbf{a}_O$ cambia de

$$\mathbf{a}_O = \alpha \overrightarrow{OR} \quad \text{to} \quad \mathbf{a}_Q = \alpha \overrightarrow{QR};$$

y, puesto que $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$, obtenemos la fórmula de desplazamiento

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_O - \alpha \overrightarrow{OQ} \tag{7}$$

análoga a (3) y a (5). Las coordenadas del punto $(\alpha, \mathbf{a}_O)$ son también homogéneas puesto que $(\lambda\alpha, \lambda\mathbf{a}_O)$ representa al mismo punto. Por lo tanto, un punto en el espacio depende de *tres* números independientes. *Existen* ∞^3 *puntos en el espacio.*

En las coordenadas homogéneas para

un punto $(\alpha, \mathbf{a}_O)$, una recta $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_O)$, un plano $(\mathbf{a}, \alpha_O)$,

el primero no puede anularse y el segundo (con el subíndice O) depende de la elección del origen. Un cambio de origen $O \to Q$ implica las fórmulas de desplazamiento

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_O - \overrightarrow{OQ}\,\alpha, \qquad \mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_O - \overrightarrow{OQ} \times \mathbf{a}, \qquad \alpha_Q = \alpha_O - \overrightarrow{OQ} \cdot \mathbf{a} \tag{8}$$

que tienen la misma forma general.

El punto, recta y plano

$$\mathbf{r}\alpha = \mathbf{a}_O, \qquad \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}_O, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha_O, \tag{9}$$

están a las distancias

$$d_O = \frac{|\mathbf{a}_O|}{|\alpha|}, \qquad \frac{|\mathbf{a}_O|}{|\mathbf{a}|}, \qquad \frac{|\alpha_O|}{|\mathbf{a}|} \tag{10}$$

del origen O. La primera es obvia y las otras se pueden demostrar fácilmente. Así, si $\mathbf{p}$ es el vector perpendicular de O a la recta,

$$\mathbf{p} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}_O, \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = 0;$$

por lo tanto

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{p} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{a}_O,$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{a}_O}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \qquad |\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a}_O|}{|\mathbf{a}|}.$$

Para encontrar las distancias desde un punto Q, cambiamos O a Q en (10) y usamos las fórmulas de desplazamiento (8). Así, si $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$,

$$d_Q = \frac{|\mathbf{a}_O - \mathbf{q}\alpha|}{|\alpha|}, \qquad \frac{|\mathbf{a}_O - \mathbf{q} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}, \qquad \frac{|\alpha_O - \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}. \tag{11}$$

Ejemplo 1. *Dos rectas* $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$ *son coplanares cuando y sólo cuando*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_0 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_0 = 0. \tag{12}$$

Demostración. Si R_1, R_2, son puntos en $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$, las rectas son coplanares cuando y sólo cuando los vectores $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, son coplanares: esto es, cuando

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Ejemplo 2. *La mínima distancia entre las rectas no paralelas* $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$ *es*

$$d = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_0 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_0|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}. \tag{13}$$

Demostración. Si R_1, R_2, son puntos en las rectas $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$, d tiene el mismo valor numérico que la componente de $\overrightarrow{R_2R_1}$ a lo largo de su normal común $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, es decir

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que la recta AB tiene las coordenadas $(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

2. Demostrar que el plano ABC tiene las coordenadas $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}, [\mathbf{abc}])$.

3. Si las rectas $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$ y $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$ son coplanares, demostrar que concurren en el punto
$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0}{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}} \quad \text{si} \quad \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b} \neq 0.$$

4. Demostrar que las rectas AA' y BB' son coplanares y encontrar su punto de intersección, dado que

$$A(4, 5, 1), \quad A'(3, 9, 4); \qquad B(-4, 4, 4), \quad B'(0, -1, -1).$$

5. Demostrar que las rectas no paralelas $(\mathbf{a}, \alpha_0)$, $(\mathbf{b}, \beta_0)$ se intersectan en la recta $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \beta_0\mathbf{a} - \alpha_0\mathbf{b})$.

6. Demostrar que la recta $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$ corta al plano $(\mathbf{b}, \beta_0)$ en el punto

$$\mathbf{r} = \frac{\beta_0\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}_0}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \quad \text{si} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0.$$

[Resolver $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \beta_0$ para $\mathbf{r}$.]

7. Si las rectas $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$ y $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$ son paralelas y $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, demostrar que la distancia entre ellas es $|\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0|/|\mathbf{a}|$.

8. Encontrar el punto de intersección de los tres planos

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha_0, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \beta_0, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = \gamma_0 \qquad \text{si} \quad [\mathbf{abc}] \neq 0.$$

[Cf. Dem. 15.6.]

9. Demostrar que la recta $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$ está en el plano $(\mathbf{b}, \beta_0)$ cuando y sólo cuando

$$\beta_0\mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b} = 0.$$

[Elimínese $\mathbf{r}$ de $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \beta_0$, cuando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.]

10. Si los tres *puntos* $(\alpha, \mathbf{a}_0)$, $(\beta, \mathbf{b}_0)$, $(\gamma, \mathbf{c}_0)$ están en una recta, el teorema 5.1 establece que existen tres números x, y, z, tales que

$$x\frac{\mathbf{a}_0}{\alpha} + y\frac{\mathbf{b}_0}{\beta} + z\frac{\mathbf{c}_0}{\gamma} = 0, \qquad x + y + z = 0.$$

Si tres *planos* $(\mathbf{a}, \alpha_0)$, $(\mathbf{b}, \beta_0)$, $(\mathbf{c}, \gamma_0)$ pasan por una recta, ¿existen tres números x, y, z, tales que

$$x\frac{\mathbf{a}}{\alpha_0} + y\frac{\mathbf{b}}{\beta_0} + z\frac{\mathbf{c}}{\gamma_0} = 0, \qquad x + y + z = 0?$$

18. Resumen del álgebra de vectores.

Suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, mediante la construcción del triángulo.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} = -\mathbf{a}.$$

Diferencia: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Factor numérico: Si $\lambda > 0$, $\pm\lambda\,\mathbf{a}$ tiene $\begin{cases}\text{longitud } \lambda|\mathbf{a}| \\ \text{dirección } \pm\,\mathbf{a}\end{cases}$

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}, \qquad (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a};$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

Producto escalar: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; \qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c};$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \text{ si } \neq \mathbf{0}.$$

Producto vectorial: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{e}$,

$|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{e} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, conjunto $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ dextrorso

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}; \qquad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \text{ si } \neq \mathbf{0}.$$

Triple producto: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Producto paralelepipédico: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{cases} V, & \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ dextr.} \\ -V, & \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ sinistr.} \end{cases}$

V = volumen del paralelepípedo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

$$[\mathbf{abc}] = \begin{cases} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \end{cases}$$

$[\mathbf{abc}] = 0 \quad \rightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ coplanares, si $\neq \mathbf{0}$.

Bases recíprocas: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$;

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j, \qquad [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3][\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3] = 1.$$

La base **i**, **j**, **k**, es recíproca consigo misma y $[\mathbf{ijk}] = 1$.

Componentes:
$$\mathbf{a} = \begin{cases} a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \\ a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3; \end{cases}$$

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \qquad a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i.$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3;$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ecuaciones en coordenadas homogéneas:

Punto $(\alpha, \mathbf{a}_O)$: $\quad \mathbf{r}\alpha = \mathbf{a}_O;$

Recta$(\mathbf{a}, \mathbf{a}_O)$: $\quad \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}_O, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_O = 0);$

Plano $(\mathbf{a}, \alpha_O)$: $\quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \alpha_O.$

Capítulo 2

Vectores Deslizantes

19. Momento de un vector deslizante. Un vector obligado a actuar sobre una recta definida se llama *vector deslizante* (§1). Dos vectores deslizantes son iguales cuando tienen la misma longitud, la misma dirección y la misma línea de acción.

Si $\mathbf{u}$ es un vector deslizante cuya línea de acción pasa por el punto R_1, la ecuación de dicha línea de acción es

$$\mathbf{r} \times \mathbf{u} = \mathbf{u}_O, \tag{1}$$

donde $\mathbf{u}_o = \overrightarrow{OR}_1 \times \mathbf{u}$.

DEFINICIÓN 1. Si R_1 es cualquier punto de la línea de acción de $\mathbf{u}$, el vector

$$\mathbf{u}_O = \overrightarrow{OR}_1 \times \mathbf{u} \tag{2}$$

se llama *momento de* $\mathbf{u}$ *con respecto al punto* O.

Por lo tanto, el momento de $\mathbf{u}$ con respecto al punto Q, es

$$\mathbf{u}_Q = \overrightarrow{QR}_1 \times \mathbf{u} = (\overrightarrow{OR}_1 - \overrightarrow{OQ}) \times \mathbf{u}$$

y está dado por la *fórmula de desplazamiento*

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_O - \overrightarrow{OQ} \times \mathbf{u}. \tag{3}$$

Tenemos también

$$\mathbf{u}_Q \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_O \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4}$$

Un vector deslizante es siempre perpendicular a su momento con respecto a un punto.

Denotamos el vector deslizante con el símbolo $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_o)$, dando las coordenadas de su línea de acción. Cualquier pareja de vectores $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_o)$ tales que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_o = 0$ determina de una manera única un vector deslizante propio.

De acuerdo con (1), el vector $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ tiene también un momento cero $\mathbf{u}_o = \mathbf{0}$. El símbolo $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ representa entonces al vector deslizante cero con una línea de acción arbitraria.

A un vector *unitario* $\mathbf{e}$ que actúe sobre la recta $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_O)$ se le llama *eje*. Así, $(\mathbf{i}, 0)$, $(\mathbf{j}, 0)$, $(\mathbf{k}, 0)$ representan a los ejes rectangulares de coordenadas.

DEFINICIÓN 2. Si l es un eje que pasa por P con vector unitario $\mathbf{e}$, a la componente rectangular de $\mathbf{u}_P$ sobre l se le llama *momento de* $\mathbf{u}$ *con respecto al eje.*

Por lo tanto, este momento axial es

$$\begin{aligned} \operatorname{comp}_l \mathbf{u}_P &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_P \\ &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{u}_O - \overrightarrow{OP} \times \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_O + \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OP} \times \mathbf{e}; \end{aligned} \tag{10.8}$$

o, puesto que $\overrightarrow{OP} \times \mathbf{e} = \mathbf{e}_O$,

(5) $\quad \operatorname{Mom}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O)$ con respecto $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_O) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_O + \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_O$,

un número enteramente independiente de la elección de P sobre el eje.

Si d es la distancia perpendicular entre $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O)$ y el eje,

$$d = \frac{|\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_O + \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_O|}{|\mathbf{e} \times \mathbf{u}|} = \frac{|\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_O + \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_O|}{|\mathbf{u}| \operatorname{sen} (\mathbf{e}, \mathbf{u})} \tag{17.13}$$

En consecuencia, el valor numérico del momento (5) es

$$|\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_O + \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_O| = |\mathbf{u}|\, d \operatorname{sen} (\mathbf{e}, \mathbf{u}).$$

Esto se convierte en $|\mathbf{u}|d$ cuando $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{e}$.

Resumiendo: Si la línea de acción de un vector $\mathbf{u}$ pasa por Q, su momento con respecto al punto P es

(6) $$\mathbf{u}_P = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}.$$

Si s es un eje que pasa por P con el vector unitario $\mathbf{e}$, el momento de $\mathbf{u}$ con respecto a s es la componente de $\mathbf{u}_P$ sobre este eje:

(7) $$\operatorname{Mom}_s \mathbf{u} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_P.$$

El momento vectorial $\mathbf{u}_P$ *representa una síntesis de los momentos escalares de* $\mathbf{u}$ *con respecto a todos los ejes que pasan por* P. Los diversos momentos axiales toman todos los valores entre $\pm |\mathbf{u}_P|$. Estos valores extremos corresponden a ejes que tienen la misma dirección de $\mathbf{u}_P$ y $-\mathbf{u}_P$.

Ejemplo. Considérese el vector deslizante $\mathbf{u} = [1, -1, 2]$ actuando sobre el punto $A(2, 4, -1)$. Encontrar el momento de $\mathbf{u}$

(*a*) con respecto al punto $P(3, -1, 2)$.
(*b*) con respecto a un eje que pase por P en la dirección $[2, -1, 2]$.

Puesto que $\overrightarrow{PA} = [-1, 5, -3]$, tenemos

$$\mathbf{u}_P = \overrightarrow{PA} \times \mathbf{u} = [-1, 5, -3] \times [1, -1, 2] = [7, -1, -4].$$

Un vector unitario a lo largo del eje es $\mathbf{e} = 1/3[2, -1, 2]$. Por lo tanto, el momento de $\mathbf{u}$ con respecto a este eje es

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_P = \tfrac{1}{3}[2, -1, 2] \cdot [7, -1, -4] = \tfrac{7}{3}.$$

O podemos calcular

$$\mathbf{u}_O = [2, 4, -1] \times [1, -1, 2] = [7, -5, -6],$$

$$\mathbf{e}_O = [3, -1, 2] \times \tfrac{1}{3}[2, -1, 2] = \tfrac{1}{3}[0, -2, -1],$$

y usar (5):

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_O + \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_O = \tfrac{1}{3}(14 + 5 - 12) + \tfrac{1}{3}(2 - 2) = \tfrac{7}{3}.$$

PROBLEMAS

1. El vector $\mathbf{f} = [2, 2, -3]$ actúa sobre el punto $\mathbf{A}(1, -2, 1)$. Calcular su momento

(i) con respecto al origen $(0, 0, 0)$;
(ii) con respecto a los ejes coordenados;
(iii) con respecto a un eje que pase por $B(1, 3, -2)$ en la dirección del vector $[2, 2, 1]$.

2. Encontrar el momento del vector $\overrightarrow{PQ}$ con respecto a los puntos A y B y con respecto al eje AB, dado que

$$P(2, 3, 0), \quad Q(-1, 2, 4); \qquad A(3, 1, -1), \quad B(5, -1, 0).$$

3. Si $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ son fuerzas unitarias actuando en R_1 y R_2, demostrar que el momento de cualquiera de las dos fuerzas con respecto al eje de la otra es $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$.

20. Adición de vectores deslizantes. La suma de dos vectores deslizantes $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O)$ y $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_O)$ se define así:

$$(1) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{u}_O) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}_O) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O).$$

Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, (1) es cero el vector deslizante cuando $\mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O = \mathbf{0}$. Si R_1 y R_2 son puntos en las líneas de acción de $\mathbf{u}$ y de $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{u}.$$

Puesto que $\mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ solamente cuando R_1 y R_2 están sobre la línea de acción de $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O)$, tenemos

TEOREMA 1. *La suma de dos vectores deslizantes es cero cuando y sólo cuando dichos vectores tienen la misma longitud y direcciones opuestas y actúan sobre la misma línea de acción.*

Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, (1) representa un vector deslizante solamente cuando $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O$ (§19); entonces

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_O = 0, \tag{2}$$

y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O)$ y $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_O)$ son coplanares (Ej. 17.1). Entonces, tenemos

TEOREMA 2. *La suma de dos vectores deslizantes* $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O)$ y $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_O)$ *es un vector deslizante propio cuando y sólo cuando* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *y sus líneas de acción son coplanares.*

Supongamos ahora que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y que las líneas de acción se intersectan en R_1. Entonces podemos tomar $\mathbf{u}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}$, $\mathbf{v}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}$. Puesto que la línea de acción de $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O)$ tiene la ecuación

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

que se satisface cuando $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, la línea de acción pasa por R_1. En consecuencia, tenemos

TEOREMA 3. *Si dos vectores deslizantes se intersectan, su suma es un vector deslizante que pasa por su punto de intersección.*

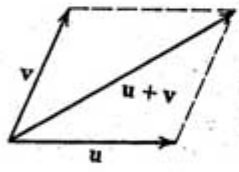


Fig. 20*a*. Suma de vectores que se cortan.

La construcción, mostrada en la Fig. 20*a*, ha sido convenientemente llamada *ley del paralelogramo.*

Ahora supongamos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y que las líneas de acción son paralelas. Entonces $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ $(\lambda \neq -1)$. Si R_1, R_2 son puntos en las líneas de acción de u y de v,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + \lambda)\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O = (\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2) \times \mathbf{u}.$$

Puesto que la línea de acción de $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O)$ tiene la ecuación

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}_O + \mathbf{v}_O$$

o bien

$$(1 + \lambda)\mathbf{r} \times \mathbf{u} = (\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2) \times \mathbf{u},$$

que se satisface cuando

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda},$$

la línea de acción pasa por el punto R, que divide a R_1R_2 en la razón $\lambda/1$ (5.2). Así, obtenemos

TEOREMA 4. *Si* $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)$ *y* $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$ *son vectores deslizantes paralelos y* $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ $(\lambda \neq -1)$, *la línea de acción de su suma es paralela a ambos y divide a cualquier segmento de* $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)$ *a* $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$ *en la razón de* $\lambda/1$.

Las construcciones cuando $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$ se muestran en la Fig. 20*b*.

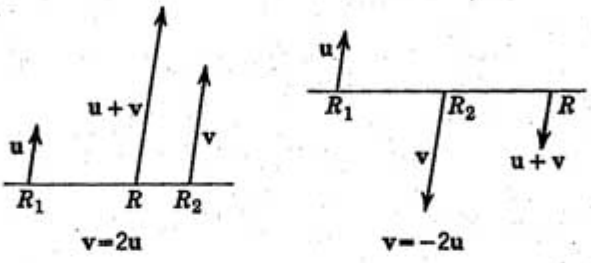


Fig. 20*b*. Suma de vectores paralelos.

21. Pares. El caso más simple, en el que la suma

$$(1) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0)$$

no es un vector deslizante, ocurre cuando

$$(2) \qquad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0};$$

puesto que un vector cero debe tener también un momento cero. En este caso los vectores dados son *iguales en magnitud, con dirección opuesta y actúan sobre líneas de acción paralelas diferentes.* Su suma tiene la forma $(\mathbf{0}, \mathbf{m} \neq \mathbf{0})$; y se dice que los vectores forman un *par de momento* $\mathbf{m}$.

Si los momentos $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$ están referidos a otro punto A, el momento del par no se altera, puesto que, de (19.3),

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + \lambda)\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0 = (\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2) \times \mathbf{u}.$$

El momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se tomen los momentos.

Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, todas las parejas de vectores deslizantes $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)$, $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$ que tienen la misma suma $(\mathbf{0}, \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0)$ se toman como pares equivalentes de momento $\mathbf{m} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0$. Su mo-

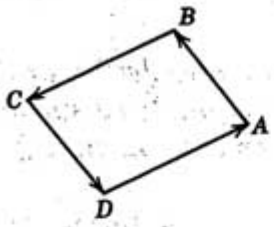


Fig. 21. Pares equivalentes.

mento puede calcularse con respecto a cualquier punto. Así, si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ forman un par, $ABCD$ es un paralelogramo (Fig. 21) y el momento del par (con respecto a D) es $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{AB}$ y es igual al área vectorial de $ABCD$ (11.10). El par $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ tiene el mismo momento $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{DA}$ (con respecto a B).

Entonces, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ son pares equivalentes. La suma

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}_O) = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_O)$$

no es un vector deslizante ni un par, cuando

$$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_O \neq 0. \tag{3}$$

En este caso podemos tomar a $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_O)$ como la suma de un vector deslizante $(\mathbf{w}, \mathbf{0})$ que pasa por el origen y un par $(\mathbf{0}, \mathbf{w}_O)$ de momento $\mathbf{w}_O$:

$$(\mathbf{w}, \mathbf{w}_O) = (\mathbf{w}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{w}_O). \tag{4}$$

El símbolo $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_O)$ representa ahora una nueva entidad llamada *motor* que incluye al vector deslizante y al par como casos especiales. †

Ejemplo. Considérense los vectores deslizantes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ formando el triángulo ABC. Su suma vectorial es cero y la suma de sus momentos, calculada con respecto a A, es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

---

† Ver Louis Brand, *Vector and Tensor Analysis*, Wiley, 1947, Capítulo II, para un tratamiento sistemático del álgebra de motores.

Para la aplicación de motores a la geometría lineal, consultar

W. Blaschke, *Vorlesungen uber Differential Geometrie*, Springer, Bd. 1, 1924, Kap. 7;

E. A. Weiss, *Einführung in die Linien-geometrie und Kinematik*, Teubner, 1935, p. 85.

Un tratamiento extenso de la aplicación del cálculo de motores a la mecánica se puede ver en el artículo de

R. von Mises, *Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik*, Z. angew. Math. u. Mech., Bd. 4, 1924.

Entonces, los tres vectores deslizantes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ son equivalentes a un par cuyo momento es el doble del área vectorial del triángulo ABC.

PROBLEMAS

Advertencia: Los vectores deslizantes deben sumarse de acuerdo con §20. Para enfatizar esto, usaremos el símbolo $\equiv$ para denotar igualdad de vectores deslizantes cuando se omiten sus momentos.

1. Si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ son vectores deslizantes y

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \equiv 0.$$

demostrar que los puntos A, B, C son colineales.

2. Si A, B, C, D son los vértices de un cuadrilátero en ese mismo orden y P y Q son los puntos medios de las diagonales AC y BD, demostrar que los vectores deslizantes

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \equiv 0.$$

3. En un triángulo ABC, se dirigen tres fuerzas de magnitudes AB, BC y CA a lo largo de las medianas. Demostrar que forman un sistema en equilibrio.

[La fuerza $\mathbf{k} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ actúa sobre el punto $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.]

4. Generalizar el resultado del Prob. 3 a cualquier polígono plano, mediante su descomposición en triángulos.

5. $ABCD$ son los vértices de un paralelogramo tomados en este orden. Demostrar que la suma de los vectores deslizantes

(*a*) $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} \equiv 0;$$

(*b*) $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} \equiv 2\overrightarrow{CD}.$$

6. Si A, B, C, D son los vértices de un cuadrilátero plano tomados en ese orden, demostrar que los vectores deslizantes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ son equivalentes a un par cuyo momento es el doble del área vectorial del cuadrilátero.

Generalizar este resultado.

7. Si A, B, C, D son los vértices de un cuadrilátero no plano y P, Q, R, S son los puntos medios de sus lados, tomados en orden, demostrar que los vectores deslizantes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ son equivalentes a cuatro veces el par formado por $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$.

8. Las fuerzas $X\mathbf{i}$, $Y\mathbf{j}$, $Z\mathbf{k}$ actúan sobre los puntos $(0, 0, c)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, respectivamente. Demostrar que se reducen a una sola fuerza si $a/X + b/Y + c/Z = 0$.

9. Las fuerzas $\mathbf{i}$, $2\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ actúan sobre los puntos $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, respectivamente. Si tienen una resultante, encontrar su magnitud y su eje.

10. Las fuerzas paralelas $\lambda_i \mathbf{e}$ actúan sobre los puntos R_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Demostrar que su resultante es como sigue :

(i) Si $\Sigma\lambda_i \neq 0$, el sistema se reduce a una sola fuerza que actúa sobre el centroide de los puntos ponderados $\lambda_i R_i$.

(ii) Si $\Sigma\lambda_i = 0$, el sistema se reduce a cero o a un par, de acuerdo con que el conjunto de los puntos ponderados $\lambda_i R_i$ sea centroidal a sí mismo o no (§7).

11. El sistema *plano* de fuerzas $\mathbf{F}_i$ que actúan sobre los puntos R_i tiene la resultante $\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_i \neq 0$. Cuando todas las fuerzas se giran con respecto a estos puntos con el mismo ángulo θ, demostrar que su resultante $\mathbf{F}$ también gira un ángulo con respecto a un punto R (el *centro astático*) dado por

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M} + (\Sigma \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i)\mathbf{F}}{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} \quad \text{donde} \quad \mathbf{M} = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Cuando las fuerzas son paralelas $(\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{e})$, demostrar que el centro astático es el centroide de los puntos ponderados $\lambda_i R_i$.

22. Vectores deslizantes coplanares. Si el conjunto de vectores deslizantes $(\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_0^i)$ es *coplanar*, tenemos, de (17.2) y (17.12),

$$\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_0^i = 0, \qquad \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_0^j + \mathbf{f}^j \cdot \mathbf{f}_0^i = 0.$$

Por lo tanto, si

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}^i, \qquad \mathbf{f}_0 = \sum \mathbf{f}_0^i$$

da la suma o *resultante* del conjunto, obtenemos

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_0 = 0 \tag{1}$$

al desarrollar $(\Sigma\mathbf{f}^i) \cdot (\Sigma\mathbf{f}_0^i)$. En consecuencia:

La resultante $(\mathbf{f}, \mathbf{f}_0)$ *de un conjunto de vectores deslizantes coplanares es*

un vector deslizante		$\mathbf{f} \neq 0$,
un par	cuando	$\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{f}_0 \neq 0$,
cero		$\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{f}_0 = 0$.

Esta resultante puede obtenerse gráficamente mediante una sucesión de las construcciones dadas en §20. Pero, cuando las líneas de acción son paralelas o casi paralelas, la siguiente construcción es mucho más conveniente. Considérese

el caso de tres vectores deslizantes $\mathbf{f}^1$, $\mathbf{f}^2$, $\mathbf{f}^3$ actuando sobre las rectas que se muestran en el diagrama de la Fig. 22*a*. Constrúyase primero la suma

$$\mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2 + \mathbf{f}^3 = \mathbf{f}$$

mediante el polígono de vectores *ABCD* (Fig. 22*b*). Escójase cualquier punto conveniente *O* en el plano *ABCD* como *polo* y trácense los vectores

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \qquad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \qquad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}, \qquad \mathbf{d} = \overrightarrow{OD}.$$

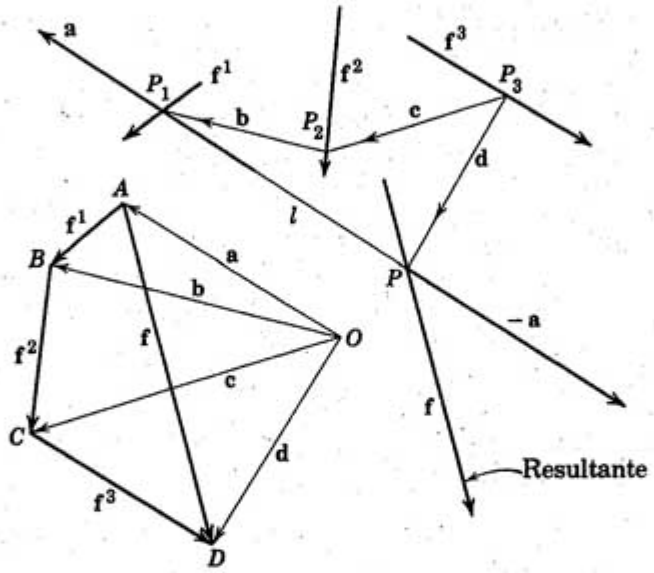


Fig. 22*b*. Polígono vectorial. Fig. 22*a*. Polígono funicular.

Introdúzcanse ahora los vectores deslizantes $\mathbf{a}$ y $-\mathbf{a}$ que actúan sobre una recta *l*, paralela a *OA* en el diagrama. Las líneas de acción de

$$\mathbf{a} + \mathbf{f}_1 = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} + \mathbf{f}_2 = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} + \mathbf{f}_3 = \mathbf{d}, \qquad \mathbf{d} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{f}$$

se dibujan pasando por P_1, P_2, P_3, P paralelas a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{f}$ en la Fig. 22*b*. El vector deslizante resultante

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \mathbf{d} - \mathbf{a} \\ &= \mathbf{c} + \mathbf{f}_3 - \mathbf{a} \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{a} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3\end{aligned}$$

actúa a lo largo de la recta donde las líneas de acción de $\mathbf{d}$ y $-\alpha$ se intersectan, en el punto P.

La figura $PP_1P_2P_3$, cuyos lados son paralelos a los rayos OA, OB, OC, OD trazados desde el polo a los vértices del polígono de vectores (Fig. 22*b*) se llama polígono *funicular*. Nótese que los lados del polígono funicular que concurren en la línea de acción de $\mathbf{f}^i$ son paralelos a los lados que subtiende $\mathbf{f}^i$ en el polígono de vectores.

La construcción anterior corresponde al caso en que $\Sigma\mathbf{f}^i \neq \neq \mathbf{0}$. Sin embargo, en el caso de que $\Sigma\mathbf{f}^i = \mathbf{0}$, el polígono formado por los vectores $\mathbf{f}^i$ se cerrará ($D = A$) y el sistema se reduce a un par o a cero. La construcción para tres vectores se muestra en la Fig. 22*c*.

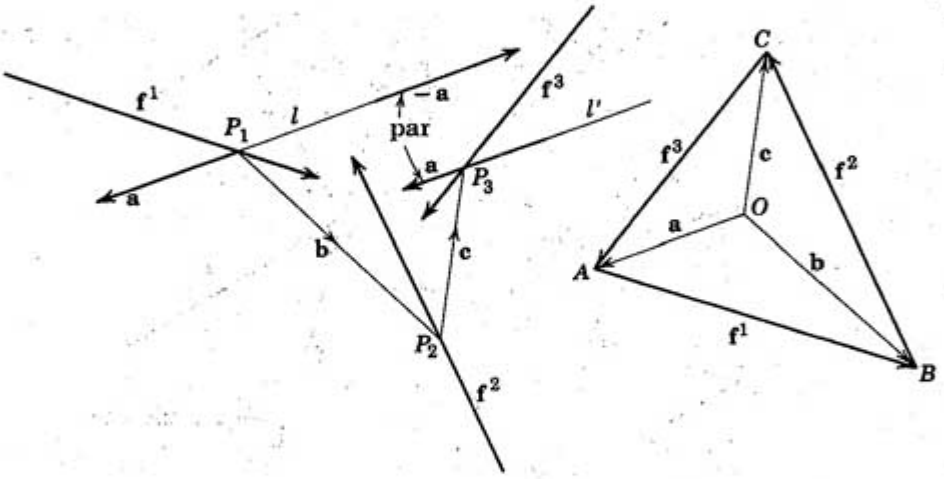


Fig. 22*c*. Reducción a un par.

Como antes, construimos las líneas de acción de

$$\mathbf{a} + \mathbf{f}_1 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} + \mathbf{f}_2 = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} + \mathbf{f}_3 = \mathbf{d},$$

donde $\mathbf{d} = \alpha$ pero actúa a lo largo de la recta l' paralela a l. El sistema se reduce al *par* $-\alpha$ en l, $\mathbf{d} = \alpha$ en l'.

Si las rectas l y l' coincidiesen, el sistema se hubiera reducido al vector deslizante $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Cuando los vectores y pares del plano xy se escriben

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O) = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}, u_3\mathbf{k}),$$

se sugiere en seguida la correspondencia uno-uno

$$(2) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{u}_O) \leftrightarrow [u_1, u_2, u_3] = \mathbf{U}$$

con los vectores en el espacio **U** dibujados desde el origen. Así

Vectores deslizantes	$(\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \mathbf{u}_O) \leftrightarrow [u_1, u_2, u_3]$,
Pares	$(\mathbf{0}, \mathbf{u}_O \neq \mathbf{0}) \leftrightarrow [0, 0, u_3]$,
Vectores nulos	$(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \leftrightarrow [0, 0, 0]$.

De los vectores en el espacio localizados en el origen, los que están en el eje de las z corresponden a pares y todos los demás a vectores deslizantes. La adición de vectores deslizantes coplanares corresponde ahora a la adición de vectores libres en el espacio:

$$(3) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{u}_O) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}_O) \leftrightarrow [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3] = \mathbf{U} + \mathbf{V}$$

Todos los vectores deslizantes paralelos a $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_o)$ están dados por $(\lambda\mathbf{u}, \lambda'\mathbf{u}_o)$. Por lo tanto, los vectores en el espacio correspondientes están en un plano paralelo a **u** y que pasa por el eje z.

Si el vector deslizante $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_o)$ pasa por el punto (x, y), el correspondiente

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, xu_2 - yu_1]$$

es un vector en el espacio perpendicular a $[y, -x, 1]$ y entonces, todos los vectores deslizantes que pasan por el punto (x, y) corresponden a vectores **U** en el espacio que están en el plano perpendicular $[y, -x, 1]$.

Estamos ahora preparados para resolver el siguiente problema: †

Expresar un vector deslizante dado como la suma de tres vectores deslizantes coplanares actuando a lo largo de rectas especificadas no concurrentes y no todas paralelas.

Solución. Escríbase el vector deslizante dado $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_o)$ en la forma (2). Sean las tres rectas dadas por sus coordenadas de Plücker

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}_O) \leftrightarrow \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{b}, \mathbf{b}_O) \leftrightarrow \mathbf{B}, \qquad (\mathbf{c}, \mathbf{c}_O) \leftrightarrow \mathbf{C}.$$

Puesto que las rectas no son concurrentes y además no son todas paralelas, los correspondientes vectores en el espacio **A**,

---

† En estática, este es el *problema de las tres fuerzas*. Para una solución gráfica, véase Brand, *Vectorial Mechanics*, Wiley, 1930, §54.

B, C no son coplanares y admiten un conjunto recíproco A′, B′, C′. Ahora

$$\mathbf{U} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} + \gamma\mathbf{C},$$

donde, de (15.8), $\alpha = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}'$, $\beta = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}'$, $\gamma = \mathbf{U} \cdot \mathbf{C}'$. Esta igualdad corresponde a

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_O) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{a}_O) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{b}_O) + \gamma(\mathbf{c}, \mathbf{c}_O),$$

y el problema está resuelto. Más aún, la solución es única.

Ejemplo. Descomponer la fuerza $\mathbf{f} = [1, 2]$ que actúa en el punto $(-3, 0)$ en el plano xy, en fuerzas que actúen a lo largo de las líneas $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 2$.

Puesto que f tiene momento -6 con respecto al eje z, $\mathbf{F} = [1, 2, -6]$. Las tres rectas corresponden a los vectores en el espacio

$$\mathbf{A} = [1, 0, 0], \qquad \mathbf{B} = [0, 1, 0]. \qquad \mathbf{C} = [-1, 1, 2].$$

Puesto que $[\mathbf{ABC}] = 2$, su conjunto recíproco es

$$\mathbf{A}' = \tfrac{1}{2}[2, 0, 1], \qquad \mathbf{B}' = \tfrac{1}{2}[0, 2, -1], \qquad \mathbf{C}' = \tfrac{1}{2}[0, 0, 1];$$

y, en consecuencia,

$$\alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}' = -2, \qquad \beta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}' = 5, \qquad \gamma = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}' = -3,$$

$$\mathbf{F} = -2\mathbf{A} + 5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}.$$

Entonces, la fuerza dada f es equivalente a la fuerza $-2\mathbf{i}$ a lo largo del eje x, $5\mathbf{j}$ a lo largo del eje y, $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ a lo largo de la recta $x + y = 2$. Hágase una comprobación gráfica.

23. Estática. Las fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido pueden ser tratadas como vectores deslizantes y ser reemplazadas por su suma. † Si las fuerzas $(\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_O^i)$ son coplanares, hay *tres* posibilidades, ya que su suma puede representar un vector deslizante, un par o cero (§22). En este caso, el polígono funicular da un método gráfico simple para obtener la resultante.

Con una distribución general de fuerzas en el espacio, hay *cuatro* posibilidades, ya que la suma

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}^i, \qquad \mathbf{f}_O = \sum \mathbf{f}_O^i,$$

† Véase *Vectorial Mechanics*, Capítulo II, para un desarrollo de la estática a partir de cuatro principios fundamentales.

representa

un vector + un par,	cuando	$\mathbf{f} \neq 0$,	$\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_O \neq 0$,
un vector deslizante,	cuando	$\mathbf{f} \neq 0$,	$\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}_O = 0$,
un par,	cuando	$\mathbf{f} = 0$,	$\mathbf{f}_O \neq 0$,
cero,	cuando	$\mathbf{f} = 0$,	$\mathbf{f}_O = 0$.

El cuerpo rígido está en equilibrio solamente en el último caso:

Un cuerpo rígido en reposo permanecerá en esa forma cuando y sólo cuando el sistema de fuerzas que actúan sobre él, tratadas como vectores deslizantes, tenga el vector deslizante nulo como suma.

PROBLEMAS

1. La línea de acción de una fuerza $\mathbf{f} = [1, -1, 2]$ pasa por el punto $P(2, 4, -1)$. Encontrar el momento de $\mathbf{f}$ con respecto
(*a*) al punto $A(3, -1, 2)$;
(*b*) a un eje que pasa por A en la dirección $[2, -1, 2]$;
(*c*) a los ejes coordenados.

2. Las fuerzas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, son iguales en magnitud y actúan sobre los puntos P_1, P_2. Demostrar que el momento de $\mathbf{f}_1$ con respecto al eje de $\mathbf{f}_2$ es igual al momento de $\mathbf{f}_2$ con respecto al eje de $\mathbf{f}_1$.

3. Se tienen las fuerzas $\mathbf{f}_1 = 30\mathbf{j}$, $\mathbf{f}_2 = 15\mathbf{j}$, $\mathbf{f}_3 = 10\mathbf{j}$, $\mathbf{f}_4 = 15\mathbf{j}$, en los puntos (0, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), respectivamente sobre el eje x. Encontrar su resultante gráfica y analíticamente.

4. Se tienen tres fuerzas, de 1, 2, 3 lb *actuando en los vértices A, B, C, de un triángulo equilátero con lados de 3 ft.** Tales fuerzas son perpendiculares a los lados AB, BC, CA, respectivamente. Cada fuerza tiende a hacer girar al triángulo en el sentido ABC con respecto a su centro. Demostrar que su resultante es una fuerza de 3 lb *** en la dirección BC y cortando a AB a 8 ft † de A.

5. La plataforma base de una grúa está fijada al suelo mediante cuatro tornillos en las esquinas $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$, $D(1, -1)$ de un cuadrado de dos m por lado. Si la carga de la grúa, de 2 000 kg actúa verticalmente hacia abajo pasando por el punto $P(0, 10)$, encontrar las reacciones que ejercen los tornillos en la plataforma.

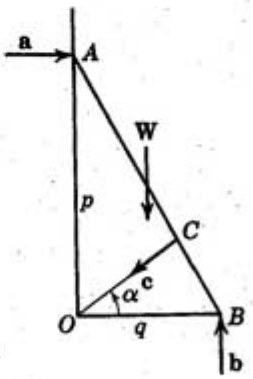


Fig. 23. Barra suspendida por una cuerda.

---

* (.454, .907, 1.361 kg).
** .914 m.
*** 1.361 kg
† 2.926 m.

6. Un rodillo uniforme que tiene un peso de W está apoyado sobre dos planos en los puntos A y B y está sostenido por una cuerda en C (Fig. 23). Demostrar que las reacciones normales en A y en B y la tensión de la cuerda en C, están dadas por

$$a = \frac{\frac{1}{2}qW\cos\alpha}{d}, \qquad b = \frac{W(p\cos\alpha - \frac{1}{2}q\,\operatorname{sen}\alpha)}{d}, \qquad c = \frac{\frac{1}{2}qW}{d},$$

donde $d = p\cos\alpha - q\operatorname{sen}\alpha$.

[Resuélvase la carga $\mathbf{F} = [0, -W, -\frac{1}{2}qW]$ a lo largo de los vectores deslizantes unitarios

$$\mathbf{A} = [-1, 0, p], \qquad \mathbf{B} = [0, -1, -q], \qquad \mathbf{C} = [\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0]$$

opuestos a a, b, c. Entonces, $a = \mathbf{F}\cdot\mathbf{A}'$, etc. (§22).]

7. Resuélvase el Prob. 6 gráficamente cuando $W = 100$ lb, $p = 8$ ft, $q = 4$ ft, $\alpha = 30°$, por medio de un polígono funicular. Úsense los resultados del Prob. 6 para comprobar los resultados.

Capítulo 3

Funciones Vectoriales de una Variable

24. Derivada de una vector. $\mathbf{u}(t)$ denota una función vectorial de una variable escalar t en el intervalo $a \leqq t \leqq b$; esto es, cuando se da t, $\mathbf{u}(t)$ está unívocamente determinado. † Entonces, se dice que $\mathbf{u}(t)$ es continua para un valor t_0 si

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0). \tag{1}$$

La derivada de $\mathbf{u}(t)$ se define como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t}, \tag{2}$$

y se denota también por $\mathbf{u}'(t)$.

Si $\mathbf{u}'(t)$ existe en el punto $t = t_0$, se dice que $\mathbf{u}(t)$ es *diferenciable* en t_0. Entonces, podemos escribir

$$\frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t} = \mathbf{u}'(t_0) + \varepsilon$$

donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$. Por lo tanto

$$\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{u}(t_0) + (\mathbf{u}'(t_0) + \varepsilon)\Delta t,$$

y cuando $\Delta t \to 0$, $\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) \to \mathbf{u}(t_0)$. En consecuencia:

Si la función $\mathbf{u}(t)$ es diferenciable en t_0, entonces es continua en ese punto.

---

† Aquí usaremos el concepto de *función* en el sentido de *función uniforme.*

Las derivadas de orden superior se definen de la misma manera que en cálculo diferencial:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{u}''(t) = \frac{d\mathbf{u}'}{dt},$$

$$\frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3} = \mathbf{u}'''(t) = \frac{d\mathbf{u}''}{dt}, \qquad \text{etc.}$$

25. Derivadas de sumas y productos. Si $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son funciones vectoriales diferenciables y $f(t)$ es una función escalar diferenciable, podemos demostrar fácilmente que

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{c} \text{ constante}) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{u}) = f\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{df}{dt}\mathbf{u}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}. \tag{5}$$

Las fórmulas (3), (4) y (5) dependen fundamentalmente de la ley distributiva para los productos respectivos. Puesto que las demostraciones siguen, en general, las mismas pautas que en el cálculo ordinario, será suficiente demostrar (5):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})\times(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) - \mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\mathbf{u}\times\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t}\times\mathbf{v} + \frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t}\times\Delta\mathbf{v}\right)\\ &= \mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v},\end{aligned}$$

donde el *orden* de los factores debe conservarse.

Si $\mathbf{u}(t)$ está referida a la base constante $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3,$$

y tenemos, de (1) y (3)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{du^1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{du^2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{du^3}{dt}\mathbf{e}_3. \tag{6}$$

Las componentes de $d\mathbf{u}/dt$ *son las derivadas de las componentes de* $\mathbf{u}$.

TEOREMA 1. *Una condición necesaria y suficiente para que un vector* $\mathbf{u}$, *propio, tenga una longitud constante es que*

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0. \tag{7}$$

Demostración. Puesto que $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, se tiene, de (4)

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 = 2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Por lo tanto, $|\mathbf{u}|$ = constante implica (7) y viceversa.

TEOREMA 2. *Una condición necesaria y suficiente para que un vector* $\mathbf{u}$, *propio, permanezca siempre paralelo a una recta dada es que*

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Demostración. Sea $\mathbf{u} = u(t)\mathbf{e}$, donde $\mathbf{e}$ es un vector *unitario*. Entonces

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = u\mathbf{e} \times \left(\frac{du}{dt}\mathbf{e} + u\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right) = u^2\mathbf{e} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt}.$$

Si $\mathbf{e}$ es constante $d\mathbf{e}/dt = \mathbf{0}$ y la condición se sigue de aquí. Inversamente, puesto que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, la condición implica que $\mathbf{e} \times (d\mathbf{e}/dt) = \mathbf{0}$, pero puesto que $\mathbf{e} \cdot (d\mathbf{e}/dt) = \mathbf{0}$, por el Teorema 1 se tiene que estas ecuaciones son contradictorias a menos que $d\mathbf{e}/dt = \mathbf{0}$. Esto es, $\mathbf{e}$ es constante.

Cuando $\mathbf{u}$ es una función de la variable escalar s y s es una función de t, se tiene la conocida *regla para derivar funciones de función*:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{9}$$

26. Curvas. *Una curva es un agregado de puntos cuyas coordenadas son funciones de una variable.* Así, las ecuaciones

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \tag{1}$$

representan una curva en el espacio. A la variable t se le llama

parámetro y cada valor del parámetro dentro de un cierto conjunto T: $a \leqq t \leqq b$ corresponde a un punto definido $P(x, y, z)$ de la curva. Si $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son funciones continuas en T, se dice que la curva es *continua* en ese intervalo.

Para evitar el caso en que la curva degenera en un punto, excluimos la circunstancia en que las tres funciones sean constantes. Hacemos también la restricción de que el intervalo T sea tal que cada t en $a \leqq t < b$ corresponda a un punto diferente de la curva. Entonces, las ecuaciones (1) establecen una correspondencia biunívoca entre los puntos de la curva y los valores de t en $a \leqq t < b$. Cuando $t = a$ y $t = b$ corresponden al mismo punto, decimos que la curva es *cerrada*.

Un valor t del parámetro corresponde a *un punto ordinario* de la curva cuando las tres derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ existen y son continuas en t y además por lo menos una es diferente de cero. Un arco de una curva que consista únicamente de puntos ordinarios se llama *suave*.

Podemos hacer el cambio de parámetro

$$t = \varphi(u) \qquad \text{donde} \qquad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),$$

siempre y cuando

(i) $\varphi'(u) > 0$ en U: $\alpha \leqq u \leqq \beta$,

(ii) $\varphi'(u)$ sea continua en U. †

Entonces $\varphi(u)$ es una función creciente en U y $t = \varphi(u)$ establece una correspondencia biunívoca entre los valores u en U y los valores t en T. Poniendo $t = \varphi(u)$ en (i), obtenemos otro conjunto de ecuaciones paramétricas y, puesto que

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt}\varphi'(u), \qquad \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dt}\varphi'(u), \qquad \frac{dz}{du} = \frac{dz}{dt}\varphi'(u),$$

los puntos ordinarios son los mismos que antes.

Podemos combinar las ecuaciones (1) para obtener la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \mathbf{r}(t). \tag{2}$$

Ahora, cada valor de t corresponde a un punto P de la curva, cuyo vector de posición es $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t)$.

---

† Podemos reemplazar (i) por $\varphi'(u) < 0$ y entonces $\varphi(u)$ es una función decreciente. Esto hace que U se convierta en $\beta \leqq u \leqq \alpha$.

Ejemplo. Las ecuaciones

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = 0 \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

son ecuaciones paramétricas de un círculo unitario con centro en el origen. Puesto que con los valores $t = \pm\pi$ obtenemos el mismo punto $(-1, 0, 0)$, la curva es cerrada. Obviamente, también es continua y suave. Si hacemos e lcambio de parámetro

$$t = 2\tan^{-1} u \quad (-\infty \leqq u \leqq \infty), \qquad \frac{dt}{du} = \frac{2}{1+u^2} > 0,$$

y así obtenemos las nuevas ecuaciones paramétricas para el círculo:

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad y = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad z = 0, \qquad (-\infty \leqq u \leqq \infty).$$

27. Vector tangente. Si P_0 y P son puntos vecinos en una curva

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad (a \leqq t \leqq b), \tag{1}$$

y la cuerda P_0P tiende a una posición límite cuando P se acerca a P_0 a lo largo de la curva, a la recta en el límite se le llama *tangente* a la curva en P_0. Ahora bien, si

$$\overrightarrow{OP}_0 = \mathbf{r}(t_0), \qquad \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t),$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

y entonces, cuando $t \to t_0$, tenemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \tag{2}$$

en todos los puntos ordinarios de la curva, puesto que las derivadas por la derecha existen y no todas ellas son cero. Entonces, la posición límite de la recta P_0P cuando $t \to t_0$ es una recta que pasa por P_0 y es paralela a $d\mathbf{r}/dt$. Por lo tanto, $d\mathbf{r}/dt$ es un vector tangente a la curva en P_0. Si $\Delta t > 0$ en la Fig. 27, $\Delta\mathbf{r}/\Delta t = P_0A$ es un múltiplo positivo de $\overrightarrow{P_0P}$, pero si $\Delta t < 0$, $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ es un múltiplo negativo de $\overrightarrow{P_0P}$ y $\overrightarrow{P_0A}$ debe invertirse en la figura. En cualquier caso, $\overrightarrow{P_0A}$ tiende a un vector límite $\overrightarrow{P_0A_0}$ que apunta en la dirección en que crece t.

El vector $d\mathbf{r}/dt$ es un vector tangente a la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

en todos los puntos ordinarios y apunta en la dirección en que crece t.

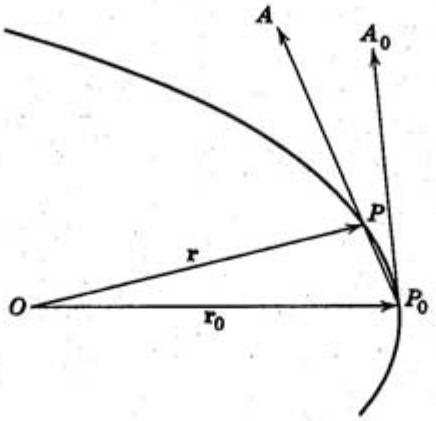


Fig. 27. Vector tangente.

Ejemplo. Encontrar las ecuaciones de la tangente a la curva

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3$$

en el punto $t = 1$.

El punto de tangencia es $P_0(3, 3, 2)$ y el vector tangente en este punto es

$$[3, 6t, 6t^2]_{t=1} = 3[1, 2, 2].$$

Cualquier vector a lo largo de la recta tangente es un múltiplo de [1, 2, 2] y si $P(x, y, z)$ es un punto sobre la tangente

$$\overrightarrow{P_0P} = [x - 3, y - 3, z - 2] = \lambda[1, 2, 2].$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la tangente en (3, 3, 2) son

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

28. Vector unitario tangente. En cálculo se demuestra que un *arco* de una curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es rectificable y que su longitud desde $t = a$ hasta $t = b$ está dada por †

$$(1) \qquad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt.$$

En consecuencia, el arco s entre los puntos correspondientes a los valores a y b de parámetro, es

$$(2) \qquad s = \int_a^t \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt, \qquad a \leqq t \leqq b,$$

† Ver Louis Brand, *Advanced Calculus,* Wiley, 1955, pp. 284-285.

y

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| > 0. \tag{3}$$

Entonces, s es una función continua creciente de t. Lo mismo es válido para la función inversa $t = \varphi(s)$ y consecuentemente, podemos escribir la ecuación de la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ con el arco s como parámetro.

Podemos ahora demostrar el importante

TEOREMA. *Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es la ecuación vectorial de una curva con el arco $s = P_0P$ como parámetro, entonces*

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T} \tag{4}$$

que es un vector unitario tangente a la curva en P y apuntando en la dirección en que crecen los arcos.

Demostración. De §27 sabemos que $d\mathbf{r}/ds$ es un vector tangente a la curva en la dirección en que crece s y, de (3)

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \frac{ds}{ds} = 1.$$

COROLARIO. *La razón de la cuerda de una curva suave al arco que subtiende, se acerca a 1 a medida que el arco se acerca a cero.*

Demostración. $|\Delta\mathbf{r}|/|\Delta s| = |\Delta\mathbf{r}/\Delta s| \to |d\mathbf{r}/ds| = 1$ as $\Delta s \to 0$.

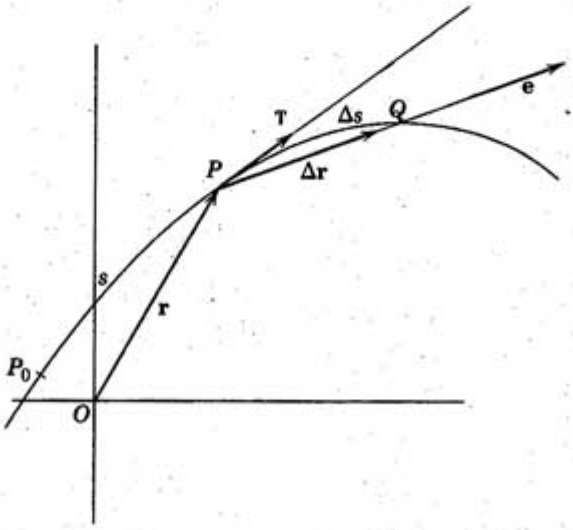


Fig. 28*a*. Vector tangente unitario: $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$.

Si *tomamos como cierto* este corolario, el resultado (4) es evidente en la Fig. 28*a*, ya que, si **e** denota a un vector unitario a lo largo de $\overrightarrow{PQ}$,

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{arco\ PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\text{cuerda } PQ}\,\frac{cuerda\ PQ}{arco\ PQ} = \mathbf{e}\,\frac{\text{cuerda } PQ}{\text{arco } PQ}.$$

Hagamos ahora que $Q \to P$. Entonces, cuando $\Delta s \to 0$, $\mathbf{e} \to \mathbf{T}$ y cuerda/arco $\to 1$ en el miembro derecho, por lo tanto, $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$.

Si el vector de posición de la curva es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}. \tag{5}$$

Multiplicando escalarmente (5) por **i**, **j**, **k**, a su vez, obtenemos

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{T}), \qquad \frac{dy}{ds} = \cos(\mathbf{j}, \mathbf{T}), \qquad \frac{dz}{ds} = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{T}). \tag{6}$$

Surge un caso importante cuando $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\theta)$, un vector unitario variable en un *plano* formando un ángulo de θ radianes con alguna recta fija, como el eje x. Si se dibuja $\mathbf{R}(\theta)$ desde el origen, el lugar geométrico de su extremidad es un círculo de radio unitario (Fig. 28*b*) y entonces $s = \theta$. Ahora (4) se convierte en

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta} = \mathbf{R}(\theta + \tfrac{1}{2}\pi) = \mathbf{P}, \tag{7}$$

que es un vector unitario perpendicular a **R** en la dirección en que crecen los ángulos. Usando este resultado, obtenemos también

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\theta} = \mathbf{R}(\theta + \pi) = -\mathbf{R}. \tag{8}$$

Si hacemos

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta \tag{9}$$

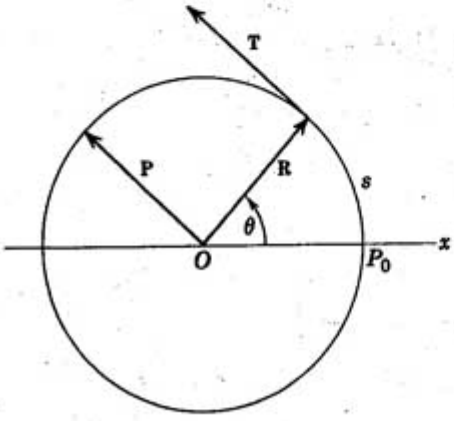


Fig. 28*b*. Derivada de un vector unitario giratorio.

en (7), encontramos de un golpe las derivadas del seno y del coseno:

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = \cos(\theta + \tfrac{1}{2}\pi), \qquad \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva plana en coordenadas polares, su ecuación vectorial es

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{R}(\theta);$$

y, derivando con respecto a s, tenemos

$$\mathbf{T} = \frac{dr}{ds}\mathbf{R} + r\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{dr}{ds}\mathbf{R} + r\frac{d\theta}{ds}\mathbf{P}.$$

Multiplicando escalarmente por **R** y por **P**, encontramos que

$$\frac{dr}{ds} = \cos(\mathbf{R}, \mathbf{T}), \qquad r\frac{d\theta}{ds} = \operatorname{sen}(\mathbf{R}, \mathbf{T}). \tag{10}$$

Ejemplo. Propiedades focales de las secciones cónicas. Si r_1 y r_2 son las distancias focales de un punto P en la elipse

$$r_1 + r_2 = 2a, \text{ que es el eje mayor.}$$

Si derivamos esta con respecto a s, obtenemos, por (10)

$$(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)\cdot\mathbf{T} = 0,$$

donde $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ son vectores unitarios a lo largo de los radios focales. Entonces, $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ es normal a la elipse en P y bisecta al ángulo interior entre los radios focales en P (trácese la figura).

Para la hipérbola

$$r_1 - r_2 = 2a, \qquad (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)\cdot\mathbf{T} = 0.$$

Entonces, $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ es normal a la hipérbola en P y bisecta al ángulo exterior entre los radios focales en P (trácese la figura).

Para una parábola cuyo eje es el eje x y su directriz el eje y,

$$r = x, \qquad \frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds}, \qquad (\mathbf{R} - \mathbf{i})\cdot\mathbf{T} = 0,$$

donde **R** es un vector unitario a lo largo del radio focal en el punto P. Por lo tanto $\mathbf{R} - \mathbf{i}$ es normal a la parábola en P y bisecta al ángulo entre **R** y $-\mathbf{i}$. Este es también un ángulo entre los radios focales si consideramos a la parábola como teniendo un segundo foco en su eje al infinito.

PROBLEMAS

1. Si el vector propio $\mathbf{u}(t)$ no es paralelo a una recta dada, demostrar que permanece paralelo a un plano dado cuando y sólo cuando $[\mathbf{u}\ \mathbf{u}'\ \mathbf{u}''] = 0$.

2. Encontrar un vector tangente a la curva

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct.$$

¿De qué curva se trata? Encontrar su longitud entre $t = 0$ y $t = 1$.

3. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ es el vector de posición a la

elipse: $x = a\cos t, \qquad y = b\,\text{sen}\,t,$

o a la hipérbola: $x = a\cosh t, \qquad y = b\,\text{senh}\,t,$

demostrar que $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{r} = \overrightarrow{OP'}$, donde OP y OP' son semidiámetros conjugados.

4. Demostrar que la curva plana $f(x, y) = 0$ tiene el vector normal

$$\mathbf{i} f_x(x, y) + \mathbf{j} f_y(x, y).$$

[Diferenciar la ecuación con respecto a s.]

5. Demostrar que la curva plana $f(r, \theta) = 0$ tiene el vector normal

$$\mathbf{R} f_r(r, \theta) + \mathbf{P} \frac{f_\theta(r, \theta)}{r}.$$

[Diferenciar la ecuación con respecto a s.]

29. Fórmulas de Frenet. Para una curva rectificable,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(s), \qquad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T},$$

que es la tangente unitaria en P. Puesto que la longitud de $\mathbf{T}$ es constante, $d\mathbf{T}/ds$, en caso de ser diferente de cero, debe ser perpendicular a $\mathbf{T}$ (Teorema 25.1). Una recta dirigida que pase por P en la dirección de $d\mathbf{T}/ds$ se llama la *normal principal* de la curva en P. Sea $\mathbf{N}$ un vector unitario en la dirección de la normal principal. Entonces, podemos escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \tag{1}$$

donde κ es un escalar no negativo llamado *curvatura* de la curva en P.

Ahora $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ es un tercer vector unitario tal que $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ formen un conjunto dextrorso de vectores unitarios ortogonales en cada punto de la curva $\kappa \neq 0$. A medida que P recorre la curva, hablamos del *triedro en movimiento* $\mathbf{TNB}$. Una recta dirigida que pase por P en la dirección de $\mathbf{B}$ se llama *binormal* a la curva en P.

Puesto que **B** es un vector unitario, $d\mathbf{B}/ds$, en caso de ser diferente de cero, debe ser perpendicular a **B**. Derivando $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, tenemos

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

de acuerdo con (1). Por lo tanto, $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a **T** lo mismo que a **B** y, en consecuencia, paralelo a **N**. Podemos entonces escribir

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \tag{2}$$

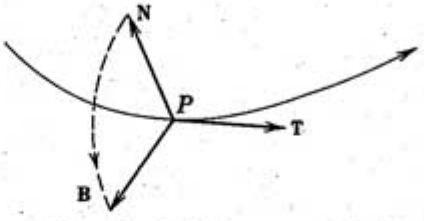


Fig. 29. Triedro en movimiento.

P. El signo menos en (2) tiemado *torsión* de la curva en en donde τ es un escalar llane este propósito: cuando $\tau > 0$, $d\mathbf{B}/ds$ tiene la dirección de $-\mathbf{N}$, entonces, cuando P se mueve sobre la curva en una dirección positiva, **B** gira alrededor de **T** en el mismo sentido que un tornillo de rosca derecha que avance en la dirección de **T** (Fig. 29).

Podemos ahora calcular $d\mathbf{N}/ds$ derivando $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ y usando (1) y (2):

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \times \mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \times \mathbf{N}. \tag{3}$$

Juntando (1), (2) y (3) tenemos el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}/ds &= \kappa\mathbf{N}, \\ d\mathbf{N}/ds &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ d\mathbf{B}/ds &= -\tau\mathbf{N}, \end{aligned} \tag{4}$$

conocidas como *fórmulas de Frenet.* † Estas fórmulas son fundamentales en la teoría de las curvas en el espacio.

De (4) vemos que κ y τ tienen las dimensiones del recíproco de longitud; entonces

$$\rho = 1/\kappa, \qquad \sigma = 1/\tau \tag{5) (6}$$

† O fórmulas de *Frenet-Serret.*

tienen las dimensiones de la longitud y son llamados *radio de curvatura* y *radio de torsión*, respectivamente.

Puesto que, por definición, **N** tiene la misma dirección que $d\mathbf{T}/ds$, la curvatura κ nunca es negativa. Si κ es idénticamente cero, $d\mathbf{T}/ds = \mathbf{0}$ y **T** es un vector unitario con dirección constante; la curva es por lo tanto una línea recta. Inversamente, para una recta, **T** es constante, $d\mathbf{T}/ds = \mathbf{0}$ y $\kappa = 0$. *Las únicas curvas con curvatura cero son las líneas rectas.*

La torsión puede ser positiva o negativa. A medida que P recorre la curva en una dirección positiva, el triedro **TNB** girará alrededor de **T** en la misma forma que un tornillo de rosca derecha o de rosca izquierda de acuerdo con que τ sea positiva o negativa. El signo de τ es independiente de la elección de la dirección positiva en la curva, ya que, si invertimos la dirección positiva, debemos reemplazar

$$s, \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \frac{d\mathbf{B}}{ds} \quad \text{por} \quad -s, -\mathbf{T}, \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{N}, -\mathbf{B}, \frac{d\mathbf{B}}{ds},$$

y las ecuaciones (4) conservan su forma con κ y τ inalteradas.

Si $\tau = 0$ (idénticamente), $d\mathbf{B}/ds = \mathbf{0}$ y **B** es un vector constante. Entonces, de

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0, \qquad \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

y la curva está en un plano normal a **B**. Inversamente, para una curva plana, **T** y **N** siempre están en un plano fijo mientras que **B** es un vector unitario normal a ese plano; por lo tanto, $d\mathbf{B}/ds = \mathbf{0}$ en todos los puntos para los cuales **N** está definido ($\kappa \neq 0$) y $\tau = 0$. *Las únicas curvas que tienen torsión nula son curvas planas.* †

Introduciendo el *vector de Darboux*

$$\boldsymbol{\delta} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}, \tag{7}$$

las fórmulas de Frenet toman la memorable forma

$$d\mathbf{T}/ds = \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{T}, \quad d\mathbf{N}/ds = \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{N}, \quad d\mathbf{B}/ds = \boldsymbol{\delta} \times \mathbf{B}. \tag{8}$$

---

† Para una recta ($\kappa = 0$), **N** no está determinado. Entonces, convenimos en asignar a **N** cualquier dirección fija que sea normal a **T** y, como antes, definimos $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. Luego **B** es constante, $d\mathbf{B}/ds = \mathbf{0}$ y $\tau = 0$.

El vector de Darboux muestra ser la velocidad angular del triedro en movimiento TNB cuando la curva se recorre con velocidad constante (§34).

30. Curvatura y torsión. Usando las fórmulas de Frenet podemos calcular la curvatura y la torsión de una curva a partir de sus ecuaciones paramétricas. Así, derivando tres veces $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ y denotando las derivadas con respecto a t con puntos, tenemos

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\mathbf{T},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{s}\mathbf{T} + \dot{s}^2\kappa\mathbf{N},$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = \dddot{s}\mathbf{T} + \ddot{s}\dot{s}\kappa\mathbf{N} + (2\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^2\dot{\kappa})\mathbf{N} + \dot{s}^3\kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$= (\dddot{s} - \dot{s}^3\kappa^2)\mathbf{T} + (3\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^2\dot{\kappa})\mathbf{N} + \dot{s}^3\kappa\tau\mathbf{B}.$$

Por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \dot{s}^3\kappa\mathbf{B}, \qquad \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}} = \dot{s}^6\kappa^2\tau,$$

$$|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = |\dot{s}|^3\kappa, \qquad \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2\tau,$$

y puesto que $|\dot{\mathbf{r}}| = |\dot{s}| \neq 0$ en un punto ordinario,

(1) (2)
$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \qquad \tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Si la dirección positiva de la curva es en el sentido en que crece t, $\dot{s} = ds/dt > 0$ y las ecuaciones precedentes muestran que

(3) **T, B, N** tienen las direcciones de $\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$, $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}$.

Los planos que pasan por un punto $\mathbf{r}(t)$ de la curva y son perpendiculares a **T**, **N** o **B** se llaman, respectivamente, planos *normal, rectificador* y *osculador* de la curva. Sus ecuaciones se obtienen fácilmente de (3). Así, si $\mathbf{q}$ es un vector de posición variable con respecto al plano osculador, su ecuación es

(4)
$$(\mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

Si las ecuaciones paramétricas de una curva son $x = x(t)$, $y = y(t)$, tenemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}, \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j};$$

y, de (1) y (2)

(5)
$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \qquad \tau = 0.$$

Si la curva tiene la ecuación cartesiana $y = f(x)$, podemos tomar a x como el parámetro: $x = f(t)$, $y = f(t)$. Entonces κ en (5) se convierte en

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{6}$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a x.

Si la curva tiene la ecuación polar $r = f(\theta)$, tomamos $t = \theta$ como parámetro. Entonces

$$\mathbf{r} = r\mathbf{R}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{R} + r\mathbf{P}, \qquad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r)\mathbf{R} + 2\dot{r}\mathbf{P};$$

y, puesto que

$$|\dot{\mathbf{r}}| = (\dot{r}^2 + r^2)^{1/2}, \qquad |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = |2\dot{r}^2 - r(\ddot{r} - r)|,$$

tenemos, de (1)

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}|}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}. \tag{7}$$

Ejemplo 1. En el punto $t = 1$ de la cúbica alabeada

$$x = 2t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3/3,$$

encontrar **T**, **N**, **B**, κ, τ y la ecuación de su plano osculador.

Puesto que $\mathbf{r}(t) = [2t, t^2, t^3/3]$,

$$\dot{\mathbf{r}} = [2, 2t, t^2], \qquad \ddot{\mathbf{r}} = [0, 2, 2t], \qquad \dddot{\mathbf{r}} = [0, 0, 2];$$

y, en consecuencia, cuando $t = 1$,

$$\dot{\mathbf{r}} = [2, 2, 1], \qquad \ddot{\mathbf{r}} = [0, 2, 2], \qquad \dddot{\mathbf{r}} = [0, 0, 2],$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = [2, -4, 4], \qquad \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}} = 8.$$

De (3)

$$\mathbf{T} = \tfrac{1}{3}[2, 2, 1], \qquad \mathbf{B} = \tfrac{1}{3}[1, -2, 2], \qquad \mathbf{N} = \tfrac{1}{3}[-2, 1, 2];$$

el plano osculador es

$$(x - 2) - 2(y - 1) + 2(z - \tfrac{1}{3}) = 0;$$

y, de (1) y (2), $\kappa = 2/9$, $\tau = 2/9$.

Puesto que $\mathbf{r} = s\mathbf{T}$, la longitud de la curva se encuentra por medio de la ecuación

$$ds/dt = |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4}.$$

Ejemplo 2. La hélice circular. Una cuerda de tornillo o hélice, sobre un cilindro circular de radio a, tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad z = bt,$$

donde t es el ángulo medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x.

A fin de encontrar su curvatura y torsión, calculamos

$$\dot{\mathbf{r}} = [-a \operatorname{sen} t, a \cos t, b],$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [-a \cos t, -a \operatorname{sen} t, 0],$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = [a \operatorname{sen} t, -a \cos t, 0],$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = [ab \operatorname{sen} t, -ab \cos t, a^2],$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}} = a^2 b,$$

y, puesto que

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = a^2 + b^2, \qquad |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2 = a^2(a^2 + b^2),$$

tenemos, de (1) y (2)

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Puesto que τ tiene el mismo signo que b, la hélice es derecha si $b > 0$, e izquierda, si $b < 0$.

La longitud de la hélice medida desde $t = 0$, es

$$L = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}| \, dt = t\sqrt{a^2 + b^2} \tag{28.1}$$

PROBLEMA

1. Sea $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ una curva alabeada sobre una esfera unitaria. Si t es su longitud de arco, demostrar que la curva

(i) $\mathbf{r} = a \displaystyle\int_0^t \mathbf{R}(t)\, dt$ tiene curvatura constante $\kappa = \dfrac{1}{|a|}$;

y, si t es un parámetro arbitrario, la curva

(ii) $\mathbf{r} = a \displaystyle\int_0^t \mathbf{R}(t) \times \frac{d\mathbf{R}}{dt}\, dt$ tiene torsión constante $\tau = \dfrac{1}{a}$.

31. Curvas planas. Para las curvas planas, las fórmulas de Frenet se reducen a

(1) (2) $$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa \mathbf{T}.$$

Puesto que $d\mathbf{T}/ds$ está siempre dirigido hacia el lado cóncavo de una curva plana, lo mismo puede decirse para $\mathbf{N}$. En los puntos de inflexión, $d\mathbf{T}/ds = \mathbf{0}$, $\kappa = 0$, y $\mathbf{N}$ no está definida. Cuando P pasa por un punto de inflexión, $\mathbf{N}$ invierte su dirección, y lo mismo hace $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. Para remediar este comportamiento discontinuo de $\mathbf{N}$ y de $\mathbf{B}$ en los puntos de

inflexión, se usa frecuentemente la siguiente convención en la geometría diferencial de las curvas planas. Tómese a **B** como un vector unitario *fijo* normal al plano de la curva y defínase $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. Como antes, **T**, **N**, **B**, forman un conjunto dextrorso de vectores ortogonales unitarios. La curvatura κ, definida mediante (1), es ahora positiva o negativa de acuerdo con que $d\mathbf{T}/ds$ tenga la dirección de **N** o la opuesta. La ecuación (2) sigue siendo válida, ya que

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{B} \times \kappa\mathbf{N} = -\kappa\mathbf{T}.$$

Sea ψ el ángulo que forma una recta fija en el plano con la tangente en P, tomado positivo en el sentido determinado por **B**. † Entonces, de (28.7),

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\psi}\frac{d\psi}{ds} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}\frac{d\psi}{ds} = \mathbf{N}\frac{d\psi}{ds},$$

y, por lo tanto, de (1),

(3) (4) $$\kappa = \frac{d\psi}{ds}, \qquad \rho = \frac{ds}{d\psi}.$$

La *ecuación intrínseca* de una curva plana es la relación que conecta a s y a ψ, digamos $c = f(\psi)$. Cuando esta relación es conocida, el radio de curvatura $\rho = f'(\psi)$. Por ejemplo, un círculo de radio a tiene la ecuación intrínseca $s = a\psi$ cuando ψ está medido desde la tangente en el punto $s = 0$. Por lo tanto, para un círculo, $\rho = a$.

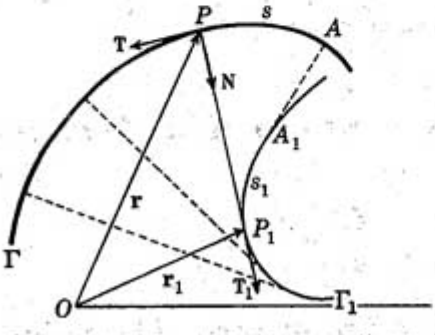


Fig. 31*a*. Evoluta de una curva

Ejemplo 1. Evoluta. En cualquier punto P de una curva plana donde $\kappa \neq 0$, el *centro de curvatura* P_1 está dado por

(5) $$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho\mathbf{N}.$$

El lugar geométrico de P_1, se llama *evoluta* de la curva. Si $s = AP$ y $s_1 = A_1P_1$ denotan arcos correspondientes en la curva Γ y en su evoluta Γ_1 (Fig. 31*a*), te-

† Un vector normal a un plano determina un sentido positivo de rotación por la convención del tornillo con rosca derecha. Así, si **B** apunta *hacia arriba* desde el papel, el sentido positivo es contrario al de las manecillas del reloj. Entonces, **N** está siempre 90° *adelante* de **T**.

nemos, derivando (5) con respecto a s,

$$\mathbf{T}_1 \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{T} + \rho \frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\rho}{ds}\mathbf{N} = \frac{d\rho}{ds}\mathbf{N}.$$

Escojemos la dirección positiva en Γ_1 de tal manera que $\mathbf{T}_1 = \mathbf{N}$. Entonces

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\rho}{ds}, \qquad s_1 = \rho + \quad \text{constante};$$

y, puesto que $\Delta s = \Delta\rho$, un arco de la evoluta es igual a la diferencia de los valores de ρ en sus extremos. Estas propiedades demuestran que una curva Γ puede dibujarse con el extremo P de un hilo tirante desenrrollado desde su evoluta Γ_1. El hilo es siempre tangente a Γ_1 y su porción libre es igual a ρ. Desde este punto de vista, Γ se llama la *involuta* de Γ_1.

Puesto que $\mathbf{T}_1 = \mathbf{N}$,

$$\psi_1 = (\mathbf{i}, \mathbf{T}_1) = (\mathbf{i}, \mathbf{T}) + \tfrac{1}{2}\pi = \psi + \tfrac{1}{2}\pi;$$

y, en consecuencia, el radio de curvatura de la evoluta es

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\psi_1} = \frac{d\rho}{d\psi} = \frac{d^2s}{d\psi^2}.$$

Ejemplo 2. Involuta. Una involuta Γ_1 de una curva plana Γ se traza con el extremo P_1 de un hilo tirante PP_1 desenrollado desde Γ (Fig. 31*b*). Si la ecuación de Γ es $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, una involuta está dada por

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - s\mathbf{T} \tag{6}$$

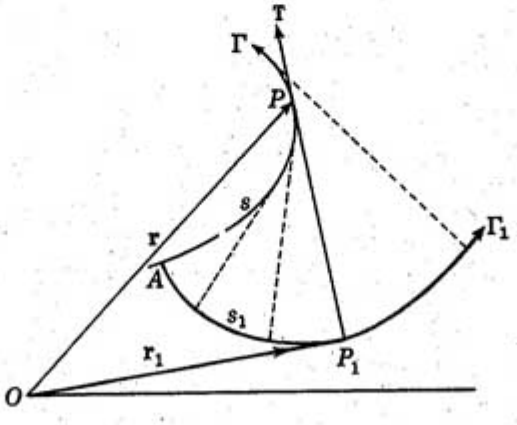


Fig. 31*b*. Involuta de una curva plana.

si los arcos s y s_1 se miden desde el punto A donde las curvas concurren. Derivando (6) con respecto a s,

$$\mathbf{T}_1 \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{T} - \mathbf{T} - s\kappa\mathbf{N} = -s\kappa\mathbf{N}.$$

Si escojemos la dirección positiva en Γ_1 de tal manera que $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{N}$,

$$\frac{ds_1}{ds} = s\kappa = s\frac{d\psi}{ds}, \quad \text{o} \quad \frac{ds_1}{d\psi} = s.$$

Así, si Γ tiene la ecuación intrínseca $s = f(\psi)$ cuando ψ se mide desde una tangente en $A(s = 0)$, el arco de la involuta

$$s_1 = \int_0^{\psi} s\, d\psi.$$

Por ejemplo, de la ecuación intrínseca de un círculo $s = a\psi$, se obtiene

$$s_1 = \int_0^{\psi} a\psi\, d\psi = \tfrac{1}{2}a\psi^2$$

para el arco de su involuta.

Ejemplo 3. Evolventes. Consideremos la función vectorial plana de dos variables $\mathbf{r} = \mathbf{f}(u, v)$. Una familia de curvas de un parámetro (con u como parámetro) está dada por

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{f}(u, v), \qquad u = \text{constante}.$$

Si esta familia tiene una curva evolvente dada por $v = \varphi(u)$, es decir

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}\{u, \varphi(u)\}, \tag{7}$$

los vectores

$$\frac{d\mathbf{p}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}\varphi'(u) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{r}_1}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}$$

son paralelos a los puntos de contacto; esto es,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Esta condición debe llenarse si la evolvente existe. Si (8) nos conduce a una relación $v = \varphi(u)$ (que no anule a $\delta f/\delta u$ o a $\delta f/\delta v$), esta relación nos da la evolvente (7).

Considérese, por ejemplo, la familia de un parámetro de normales a la curva plana $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, es decir

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(s) + v\,\mathbf{N}(s) \qquad (s = \text{constante}).$$

Si tales curvas tienen una evolvente,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v} = (\mathbf{T} - v\kappa\mathbf{T}) \times \mathbf{N} = (1 - v\kappa)\mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Entonces, la evolvente está dada por $v = 1/\kappa = \rho$, o

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}(s) + \rho\mathbf{N}(s),$$

es decir, el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva.

PROBLEMAS

1. En los puntos $t = 0$ y $t = 1$ de la cúbica

$$x = 3t, \quad y = 3t^2, \quad z = 2t^3$$

encontrar

(*a*) **T**, **N**, **B**;

(*b*) κ y τ;

(*c*) las ecuaciones de los planos normal y osculador.

2. Encontrar κ y τ en cualquier punto t de la curva

(*a*) del Prob. 1;

(*b*) $x = a(3t - t^3)$, $y = 3at^2$, $z = a(3t + t^3)$.

3. Demostrar que el radio de curvatura de la elipse

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = a \cos t$$

es $\rho = a(1 + \operatorname{sen}^2 t)^{3/2}/\sqrt{2}$.

4. Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una curva plana Γ, demostrar que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + c\mathbf{N}$ (c constante) es una *curva paralela* ($\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}$ en puntos correspondientes); y que

(*a*) $s_1 = s - c\psi$ si $s_1 = s = 0$ cuando $\psi = 0$;

(*b*) $\rho_1 = \rho - c$.

5. Demostrar que la ecuación intrínseca de la *catenaria* $y = c \cosh (x/c)$ es $s = c \tan \psi$ cuando s se mide desde el vértice ($\psi = 0$).

6. Demostrar que la ecuación intrínseca de la *cicloide*

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

formada por un círculo de radio a que rueda a lo largo del eje x, es $s = 4a(1 - \operatorname{sen} \psi)$ donde s y ψ se miden desde el eje x ($\psi = \pi/2$).

7. Demostrar que la curvatura y la torsión de la curva

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}\, t$$

son $\kappa = -\tau = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$.

8. Encontrar la evolvente de la familia de rectas en el plano xy

$$\mathbf{r} = p(\theta)\mathbf{R} + \lambda\mathbf{P}$$

donde **R** y **P** son los vectores unitarios de §28, θ = ángulo (**i**, **R**) y $p\mathbf{R}$ es el vector normal de O a la recta.

Demostrar que la evolvente es la curva

$$\mathbf{r}_1 = p(\theta)\mathbf{R} + p'(\theta)\mathbf{P}$$

y que

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}, \qquad \frac{ds_1}{d\theta} = p(\theta) + p''(\theta).$$

9. Encontrar la evolvente de la familia de rectas para las cuales el segmento comprendido entre el eje x y el eje y tiene longitud constante c.

[Póngase $p = c \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ en el Prob. 8.]

Demostrar que las ecuaciones paramétricas de la evolvente son

$$x = c \operatorname{sen}^3 \theta, \quad y = c \cos^3 \theta,$$

y que la longitud de la curva es $6c$.

10. Demostrar que el vector de Darboux δ es constante si κ y τ son constantes y que δ tiene una dirección fija si κ/τ es constante.

11. Una *hélice* es una curva alabeada cuya tangente forma un ángulo constante con una dirección fija ($\mathbf{e} : \mathbf{T} = \cos \alpha$, donde $\mathbf{e}$ es un vector unitario en la dirección dada). Demostrar:

(*a*) Que las hélices son las únicas curvas alabeadas para las cuales el vector de Darboux tiene una dirección constante.

(*b*) Que las hélices son las únicas curvas alabeadas para las cuales κ/τ es constante.

(*c*) Las hélices circulares son las únicas curvas alabeadas para las cuales κ y τ (y también el vector de Darboux) son constantes.

[*Vector and Tensor Analysis*, §51.]

32. Cinemática de una partícula. Sea $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ el vector de posición de una partícula en movimiento con respecto a algún sistema de referencia. Si su trayectoria tiene la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, con el tiempo t como paramétro, la *velocidad* $\mathbf{v}$ y la *aceleración* $\mathbf{a}$ de P, con respecto a dicho sistema se definen como las derivadas con respecto al tiempo

$$(1)\,(2) \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Por la regla para derivar funciones de función,

$$(3) \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt} = v\mathbf{T}, \qquad v = \frac{ds}{dt},$$

donde el escalar v es un número con signo, cuyo valor absoluto $|v| = |\mathbf{v}|$ es la velocidad abstracta. *El vector velocidad de P es tangente a la trayectoria, tiene la dirección del movimiento y es de longitud numéricamente igual a la velocidad abstracta.*

Derivando (3) con respecto al tiempo, obtenemos

$$(4) \qquad \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt};$$

o bien, puesto que $\mathbf{T}$ puede considerarse como una función del arco s a lo largo de la curva,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = (\kappa\mathbf{N})v = \frac{v}{\rho}\mathbf{N}.$$

En consecuencia

$$(5) \qquad \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}:$$

La aceleración de P es un vector en el plano de la tangente y de la normal principal a la trayectoria de P. Sus componentes tangencial y normal son dv/dt y v^2/ρ.

La aceleración será únicamente tangencial cuando el movimiento es rectilíneo ($\rho = \infty$) y será únicamente normal cuando la velocidad abstracta sea constante ($dv/dt = 0$).

Los vectores velocidad y aceleración se toman como propios de la partícula en movimiento.

En coordenadas rectangulares

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

y

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \tag{6}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \tag{7}$$

Así, las componentes rectangulares de $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son las primera y segunda derivadas de las coordenadas con respecto al tiempo.

El movimiento en un plano puede ser referido a coordenadas polares r, θ. Entonces

$$\mathbf{r} = r\mathbf{R}(\theta), \qquad |\mathbf{R}| = 1.$$

Si derivamos dos veces con respecto a t y usamos las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{P}\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{R}\frac{d\theta}{dt},$$

encontramos

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{R} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P}, \tag{8}$$

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{R} + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{P}. \tag{9}$$

Los coeficientes de $\mathbf{R}$ y de $\mathbf{P}$ nos dan las componentes radial y transversal de $\mathbf{v}$ y de $\boldsymbol{\alpha}$:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_p = r\frac{d\theta}{dt};$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad a_p = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

Si la aceleración es únicamente radial

$$a_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

y

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \qquad \text{constante}$$

Esto significa que el vector $\overrightarrow{OP}$ barre el área a una razón constante, puesto que el sector de área medido desde la recta inicial es

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^\theta r^2\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}h.$$

Este resultado se conoce como

LEY DE LAS ÁREAS. *Si la aceleración de una partícula P está siempre dirigida hacia un punto fijo O, el vector de posición* $\overrightarrow{OP}$ *barre el área a una razón constante.*

Ejemplo 1. Movimiento circular. Una partícula P se mueve en un círculo de radio r, con velocidad angular variable $\omega = d\theta/dt$ (radianes por segundo). Su vector de posición $\overrightarrow{OP}$ es

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{R}(\theta), \qquad |\mathbf{R}| = 1,$$

y, de (28.7-8),

$$\mathbf{v} = r\omega\mathbf{P}, \qquad \mathbf{a} = -r\omega^2\mathbf{R} + r\frac{d\omega}{dt}\mathbf{P}.$$

Su velocidad $v = r_\omega$ y las componentes de su aceleración

$$a_r = -r\omega^2, \qquad a_p = r\frac{d\omega}{dt}.$$

Ejemplo 2. Movimiento uniformemente acelerado. Si una partícula tiene una aceleración constante $\mathbf{g}$ y $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, cuando $t = 0$, tenemos, al integrar $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{g}$ dos veces,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

La trayectoria es el resultado de combinar el desplazamiento $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ debido a la aceleración, con $\mathbf{v}_0 t$ debido al movimiento con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$. Se puede demostrar fácilmente que se trata de una parábola con su eje paralelo a $\mathbf{g}$.

Para encontrar la trayectoria de un proyectil bajo la acción de la gravedad (despreciando la resistencia del aire), escribimos

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{i}v_0\cos\alpha + \mathbf{j}v_0\,\text{sen}\,\alpha, \qquad \mathbf{g} = -\mathbf{j}g;$$

entonces, las ecuaciones de la trayectoria son

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Puesto que $y = 0$ en el momento $t_1 = (2v_0/g) \operatorname{sen} \alpha$, el alcance horizontal es $x_1 = (v_0^2/g) \operatorname{sen} 2\alpha$.

PROBLEMAS

1. Una partícula lleva la velocidad $\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}$, donde ω es constante. Demostrar que se mueve en un círculo con velocidad angular ω constante.

[Póngase $\mathbf{r} = r\mathbf{R}$.]

2. Una partícula se mueve en una elipse

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \operatorname{sen} \varphi,$$

de tal manera que el ángulo excéntrico φ crece a una razón constante $n(\varphi = nt)$. Demostrar que su aceleración $\boldsymbol{\alpha} = -n^2\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ se mide desde el centro de la elipse.

3. Una partícula se mueve con una aceleración constante $\boldsymbol{\alpha}$. Si su velocidad es $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en los tiempos t_1 y t_2, demostrar que $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/(t_2 - t_1)$.

4. Una partícula se mueve sobre la curva

$$x = 3t^2, \qquad y = 2t^3, \qquad z = 3t.$$

Encontrar, cuando $t = 1$,

(a) su velocidad $\mathbf{v}$ y su aceleración $\boldsymbol{\alpha}$;

(b) $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, de su trayectoria;

(c) κ y τ de su trayectoria;

(d) las componentes tangencial y normal de $\boldsymbol{\alpha}$.

5. Una partícula se mueve sobre la hélice

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \cos t, \qquad z = 2t.$$

Encontrar las mismas cantidades que en el Prob. 4, cuando $t = 0$.

6. Una partícula se mueve en la trayectoria

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = \sqrt{2}\, t.$$

Encontrar las mismas cantidades requeridas en el Prob. 4, cuando $t = 0$.

33. Velocidad relativa. En §32 definimos la velocidad $\mathbf{v}$ de una partícula P con respecto a un sistema dado de referencia $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}'$ es un segundo sistema de referencia, en movimiento con respecto a $\mathcal{S}$, ¿cómo es la velocidad $\mathbf{v}'$ de P relativa a $\mathcal{S}'$ con respecto a $\mathbf{v}$?

Hagamos que en el instante t coincida P con el punto Q, *fijo* en $\mathcal{S}'$. Entonces, derivando

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

con respecto a t, tenemos

$$\frac{d}{dt}\vec{OP} = \mathbf{v}_P, \qquad \frac{d}{dt}\vec{OQ} = \mathbf{v}_Q \qquad \text{referido a } \mathfrak{F},$$

$$\frac{d}{dt}\vec{QP} = \mathbf{v}'_P, \qquad \text{referido a } \mathfrak{F}',$$

donde el punto Q se toma como origen, puesto que, si P está en movimiento con respecto a $\mathfrak{F}'$, $\vec{QP}$ (originalmente cero) cambia con el tiempo. Obtenemos entonces

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}'_P, \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}_Q$, la velocidad del punto Q de $\mathfrak{F}'$ relativa a $\mathfrak{F}$, se llama *velocidad de transferencia* de P.

Si tomamos al sistema $\mathfrak{F}$ como "fijo" y las velocidades referidas a él como "absolutas", mientras que las velocidades con respecto a $\mathfrak{F}'$ son "relativas", podemos establecer (1) como sigue:

La velocidad absoluta de una partícula es igual a la suma de sus velocidades de transferencia y relativa.

En muchas aplicaciones, todos los puntos del sistema $\mathfrak{F}'$ tienen la misma velocidad relativa a $\mathfrak{F}$ y, entonces $\mathbf{v}_Q$ es la *velocidad de translación* de $\mathfrak{F}'$ y podemos entonces escribir

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathfrak{F}'} + \mathbf{v}'_P. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Triángulo del viento. Un aeroplano p lleva la velocidad $\mathbf{v}$ con respecto al suelo (la *tierra* e), $\mathbf{v}'$ con respecto al aire; y el aire (el *viento* w) lleva la velocidad $\mathbf{V}$ con respecto al suelo. Entonces $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$, de (2). En la Fig. 33*a*,

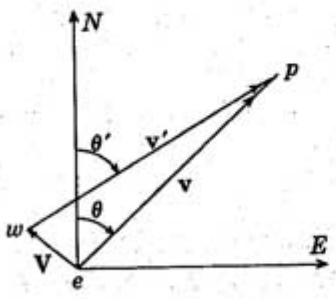


Fig. 33*a*. Triángulo del viento.

$$\mathbf{v} = \vec{ep}, \qquad \mathbf{V} = \vec{ew}, \qquad \mathbf{v}' = \vec{wp};$$

así, los vectores trazados desde e y w representan las velocidades con respecto a la tierra y al viento, respectivamente. Las magnitudes de $\mathbf{v}$ y de $\mathbf{v}'$ nos dan la *velocidad con respecto al suelo* (ep) y la *velocidad con respecto al aire* (wp) del aeroplano. Las direcciones de $\mathbf{v}$ y de $\mathbf{v}'$, dadas como los ángulos θ y θ', medidas de Norte a Este en el sentido de las manecillas del reloj, determinan la *trayectoria* que sigue y la *puntería de la nariz* del aeroplano. El avión está apuntando según $\mathbf{v}'$, pero viaja sobre el suelo en la dirección de $\mathbf{v}$. el ángulo $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ es el *ángulo de deriva*. En este ejemplo, $\mathfrak{F}$ es la tierra, $\mathfrak{F}'$ el aire en movimiento con respecto a la tierra.

Ejemplo 2. Intercepción. Un avión p vuela sobre el camino PX llevando una velocidad con respecto al suelo ep (Fig. 33*b*). Cuando el avión p pasa por el punto P, un avión q parte desde Q a interceptar

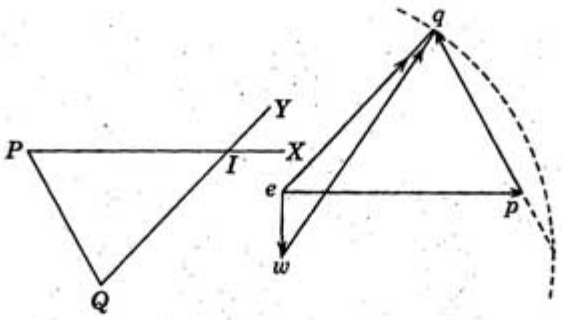


Fig. 33*b*. Intercepción.

al avión p. Si se da la velocidad con respecto al aire del avión, q, ¿sobre qué camino deberá volar q a fin de interceptar a p?

Solución. A fin de que el avión q pueda interceptar al avión p, la velocidad de q con respecto a p debe tener la dirección $\overrightarrow{QP}$.

Trácense los vectores $\overrightarrow{ep}$ y $\overrightarrow{ew}$, dando las velocidades del avión p y del viento w con respecto a la tierra e. Con w como centro, descríbase un círculo que tenga la velocidad dada del avión q con respecto al aire como radio. Si una *recta* trazada por el punto p en la dirección de $\overrightarrow{QP}$ corta al círculo en el punto q, el avión q interceptará al avión p volando con la velocidad eq sobre el camino QY paralelo a $\overrightarrow{eq}$, puesto que $\overrightarrow{pq}$, la velocidad del avión q relativa al avión p, tiene la dirección $\overrightarrow{QP}$. La intercepción ocurre en I después de haber volado un tiempo de QI/eq (o PI/ep) horas.

La intercepción no es posible si el círculo de la velocidad con respecto al aire del avión q no corta a la recta dicha. Si el círculo corta a la recta solamente en un punto, como en la Fig. 33*b*, el avión q puede interceptar a p siguiendo solamente un camino. Pero si el círculo corta a la recta en dos puntos, digamos q_1 y q_2, el avión q puede interceptar a p siguiendo dos caminos diferentes, paralelos a $\overrightarrow{eq_1}$ y $\overrightarrow{eq_2}$, respectivamente.

PROBLEMAS

1. Un avión p despega de un portaaviones s en el punto O y hace un recorrido a lo largo del camino OY, mientras el portaaviones sigue el curso OX con una velocidad constante de v km por hora (Fig. 33*c*). Si la cantidad de combustible que lleva permite al avión permanecer volando T horas a una velocidad dada con respecto al aire, ¿en qué punto B debe el avión regresar a fin de llegar al portaaviones en A, T horas después de su partida?

En la Fig. 33c, $\overrightarrow{es}$ y $\overrightarrow{ew}$ son las velocidades del portaaviones y del viento, y el círculo punteado con centro en w, es el *círculo de la velocidad* con respecto al aire. Si una recta que pase por e en la dirección

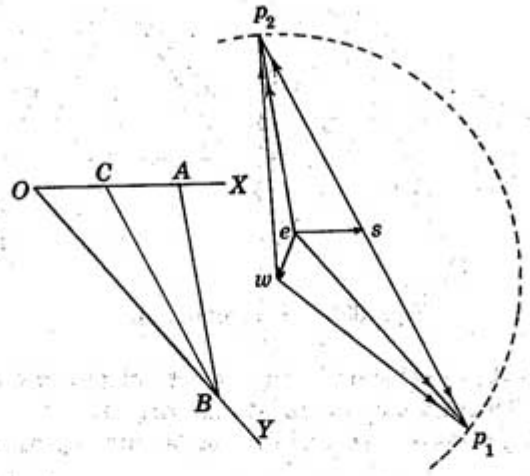


Fig. 33c. Avión regresando a un portaaviones.

OY corta al círculo en p, demostrar que p tiene las siguientes velocidades con respecto a la Tierra y con respecto al portaaviones:

$\overrightarrow{ep_1}$, $\overrightarrow{sp_1}$, a su salida, $\overrightarrow{ep_2}$, $\overrightarrow{sp_2}$, a su regreso.

Si el portaaviones está en A después de T horas, el punto de retorno B es el punto donde $AB \| ep_2$ corta a OY. El camino del avión es OBA, y el portaaviones está en C ($CB \| p_1sp_2$) cuando el avión está en B.

2. Un avión p, con T horas de tiempo de vuelo, parte de O a lo largo del camino OY (Fig. 33c). El mal tiempo local hace que el aterrizaje en Y sea peligroso y entonces se dirige para aterrizar en un aeropuerto alternativo A. Demostrar que el punto de retorno más lejano B para el avión está localiazdo de la misma manera que en la Fig. 33c, si se toma a A como un portaaviones navegando desde O hacia A con velocidad uniforme $\overrightarrow{es} = \overrightarrow{OA}/T$.

3. En el Prob. 1, $r = CB$ se llama *radio de acción* del avión. Si las velocidades de p relativas al portaaviones s son u_1 y u_2 (sp_1 y sp_2), demostrar que $r = Tu_1u_2/(u_1 + u_2)$.

34. Velocidad angular como vector. Consideremos primero un cuerpo rígido que tenga una recta fija o eje; su movimiento es entonces una rotación con respecto a este eje. La posición del cuerpo en cualquier momento puede especificarse mediante el ángulo θ (radianes) entre un plano axial fijo en nuestro sistema de referencia y un plano axial fijo en el cuerpo. Eligiendo una dirección positiva sobre el eje (vector

unitario **e**), fijamos el sentido positivo de θ mediante la convención del tornillo con rosca derecha. Entonces, la *velocidad angular* ω del cuerpo en cualquier instante, se define como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{1}$$

Entonces, ω (radianes por segundo) es positivo o negativo de acuerdo con que θ sea creciente o decreciente en el instante en cuestión.

La distribución de la velocidad en el cuerpo que está girando puede ser expresada de una manera simple si definimos la *velocidad angular* como el vector,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}.$$

Nótese que $\boldsymbol{\omega}$ está siempre referido al sentido instantáneo de rotación por la regla del tornillo de rosca derecha.

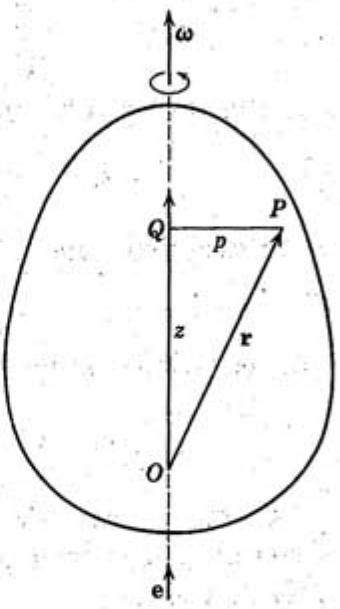


Fig. 34. Cuerpo giratorio alrededor de un eje fijo.

Elíjase un origen O sobre el eje, y sea $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ el vector de posición de cualquier partícula del cuerpo. Entonces (Fig. 34),

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = z\mathbf{e} + p\mathbf{R},$$

donde **R** es un vector unitario perpendicular al eje girando a la vez que el cuerpo. Puesto que $z\mathbf{e}$ y p son constantes durante el movimiento de P, la velocidad de P es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = p\,\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = p\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}\times\mathbf{R} = \left(\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}\right)\times(z\mathbf{e} + p\mathbf{R});$$

esto es,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}. \tag{2}$$

La velocidad de cualquier partícula de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo es igual al producto vectorial de la velocidad angular y el vector de posición de la partícula referido a cualquier origen sobre el eje.

Consideremos ahora un cuerpo rígido que tenga un punto fijo O. Sea $\mathbf{i}$ un vector unitario fijo en el cuerpo, $\mathbf{j}$ un vector unitario en la dirección de $d\mathbf{i}/dt$ (perpendicular a $\mathbf{i}$) y $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Podemos entonces escribir

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha\mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{d\mathbf{i}}{dt} \times \mathbf{j} + \mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{j}}{dt}.$$

Por lo tanto, $d\mathbf{k}/dt$ (perpendicular a $\mathbf{k}$) es también perpendicular a $\mathbf{i}$ y, en consecuencia, paralelo a $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Tenemos entonces

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \beta\mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) = \beta\mathbf{j} \times \mathbf{i} + \mathbf{k} \times \alpha\mathbf{j},$$

o, juntando los resultados

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha\mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = (\alpha\mathbf{k} - \beta\mathbf{i}) \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \beta\mathbf{j}.$$

Si escribimos ahora

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\mathbf{k} - \beta\mathbf{i},$$

estas ecuaciones asumen la misma forma:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

Ahora, el vector de posición de cualquier partícula P en el cuerpo, puede ser referido a la terna ortogonal $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, fija en el cuerpo; así

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

donde x, y, z, permanecen constantes durante el movimiento. Entonces, la velocidad de P está dada por

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}. \tag{3}$$

Así, en cualquier instante, la distribución de la velocidad en un cuerpo rígido con un punto fijo O, es la misma que si aquél estuviera girando alrededor de un eje que pasase por O con una velocidad angular ω. La recta que pasa por O en la dirección ω se llama *eje instantáneo de rotación* y ω se llama, como antes, *velocidad angular*. Ahora, sin embargo, ω

puede cambiar de dirección tanto como de magnitud. Con un eje fijo de rotación.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e} = \frac{d}{dt}(\theta\mathbf{e}),$$

así que $\boldsymbol{\omega}$ puede tomarse como la derivada con respecto al tiempo del ángulo vectorial $\theta\mathbf{e}$. Pero si se tiene un eje de rotación variable, $\boldsymbol{\omega}$ ya no puede ser expresado como una derivada con respecto al tiempo.

35. Cinemática de un cuerpo rígido. Consideraremos ahora el movimiento de un cuerpo rígido libre. Si, en cualquier instante, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad $\mathbf{v}$, se dice que el movimiento es una *translación instantánea.* Cuando la distribución de la velocidad está dada por $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP}$, se dice que el movimiento es una *rotación instantánea* alrededor de un eje que pasa por A en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Demostraremos ahora que, en el movimiento más general de un cuerpo rígido, las velocidades pueden mirarse como compuestas de una translación y de una rotación instantáneas.

Sea A cualquier punto del cuerpo rígido y denotemos su velocidad con respecto a un sistema de referencia $\mathfrak{F}$ por $\mathbf{v}_A$. Consideremos un segundo sistema de referencia $\mathfrak{F}$ que tenga una translación con una velocidad $\mathbf{v}_A$ relativa a $\mathfrak{F}$. Entonces, el movimiento del cuerpo con respecto a $\mathfrak{F}'$ es una rotación instantánea alrededor de un eje que pasa por A, puesto que A tiene velocidad nula con respecto a $\mathfrak{F}'$. La velocidad de cualquier partícula P del cuerpo es, por lo tanto

$$\mathbf{v}'_P = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP},$$

con respecto a $\mathfrak{F}'$, y consecuentemente,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP}, \tag{1}$$

con respecto a $\mathfrak{F}$. Más aún, para cualquier otro punto Q del cuerpo,

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AQ}; \tag{1}'$$

y, restando ésta de (1), obtenemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{QP}. \tag{2}$$

El contenido de estas ecuaciones se establece en el siguiente

TEOREMA. *Si A es cualquier punto de un cuerpo rígido libre, las velocidades de sus puntos son las mismas que si es-*

tuviesen compuestas de una translación instantánea $\mathbf{v}_A$ *y de una rotación instantánea* $\boldsymbol{\omega}$ *alrededor de un eje que pase por A.* $\boldsymbol{\omega}$ *es la misma para cualquier selección que se haga en A.*

De (2) se puede ver que

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_Q; \tag{3}$$

Todas las velocidades del cuerpo rígido tienen la misma proyección sobre $\boldsymbol{\omega}$, *es decir* $(\mathbf{e} : \mathbf{v}_A)\mathbf{e}$. Esta velocidad mínima se tiene en todos los puntos R de la recta para los cuales

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_A)\,\mathbf{e} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AR}.$$

La ecuación vectorial de esta recta referida a A como origen es, por lo tanto,

$$\overrightarrow{AR} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_A - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_A)\,\mathbf{e} = (\mathbf{e} \times \mathbf{v}_A) \times \mathbf{e},$$

o, puesto que $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} / |\boldsymbol{\omega}|$,

$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}\right) \times \boldsymbol{\omega}. \tag{4}$$

La recta, o *eje instantáneo*, es paralela a $\boldsymbol{\omega}$ y pasa por el punto R dado por

$$\overrightarrow{AR} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}; \tag{5}$$

y todas sus partículas tienen la misma velocidad (mínima)

$$\mathbf{v}_R = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_A)\,\mathbf{e} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}\right) \boldsymbol{\omega} \tag{6}$$

en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Por lo tanto,

El movimiento de un cuerpo rígido en cualquier instante es una rotación $\boldsymbol{\omega}$ *alrededor de un eje instantáneo combinada con una translación* $\mathbf{v}_R$ *en la dirección de* $\boldsymbol{\omega}$; *en otras palabras, un movimiento de tornillo.*

Cuando $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_A = 0$, $\mathbf{v}_R = \mathbf{0}$ y el movimiento se reduce a una rotación $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del eje instantáneo.

$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_A. \tag{4}'$$

Cuando $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, el movimiento del cuerpo es una translación.

Ejemplo 1. Movimiento plano. Cuando el movimiento es plano, $\boldsymbol{\omega}$ es perpendicular al plano y $\mathbf{v}_R = \mathbf{0}$. Entonces, en cada instante, el movimiento plano es una rotación pura alrededor de un *centro instantá-*

neo R dado por (5). Las velocidades del cuerpo en ese instante están dadas por

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{RP}. \tag{7}$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}_P$ es perpendicular a RP y $v_P = \omega(RP)$. Una perpendicular a $\mathbf{v}_P$ en P pasa por R. Análogamente, una perpendicular a $\mathbf{v}_Q$ en Q pasa por R. Tenemos entonces la siguiente construcción simple para el centro instantáneo:

Si los puntos P y Q de una figura en movimiento plano tienen velocidades no paralelas $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{v}_Q$, su centro instantáneo es el punto donde concurren las normales a estas velocidades en P y Q.

En la Fig. 35*a*, AB representa la biela de un motor; A se mueve

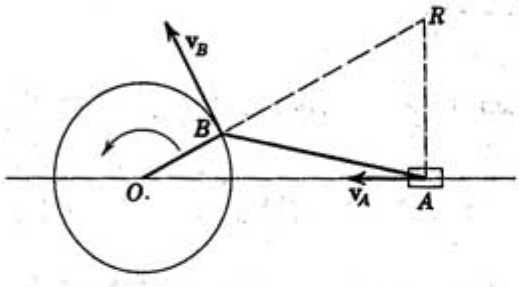


Fig. 35*a*. Biela.

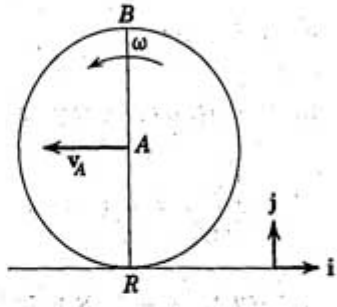


Fig. 35*b*. Rueda.

con la cruceta en una línea recta, B gira con la manivela en un círculo. El centro instantáneo de la biela está en R.

Ejemplo 2. Rueda. En la Fig. 35*b* una rueda de radio r está rodando hacia la izquierda con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. Su centro lleva la velocidad $\mathbf{v}_A = -\omega r\mathbf{i}$ y el centro instantáneo R, dado por

$$\overrightarrow{AR} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} = \frac{-\omega^2 r\, \mathbf{k} \times \mathbf{i}}{\omega^2} = -r\mathbf{j},$$

está en el punto de contacto con el piso. Por lo tanto, la velocidad de B es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{RB} = 0 + (\omega\mathbf{k}) \times (2r\mathbf{j}) = -2\omega r\mathbf{i}.$$

PROBLEMAS

1. Una veleta colocada en lo alto del mástil de un barco que navega hacia el Este a razón de 10 km por hora, apunta en dirección NNE. Cuando el barco para, la veleta apunta en dirección NO. Encontrar la velocidad del viento.

2. En el momento $t = 0$, un barco A está a una distancia de d millas del puerto y se acerca a él a u millas por hora mientras que el barco B deja el puerto a v millas por hora. Si sus respectivas rutas son rectas y forman un ángulo α, demostrar que la distancia mínima D entre los barcos, y el tiempo T en que alcanzarán esta posición, están dados por

donde $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ es la velocidad abstracta de A con relación a B.

3. Una escalera AB está apoyada sobre un piso horizontal en A y contra una pared vertical en B. Si empieza a resbalarse, encontrará su centro instantáneo R. Si la escalera forma un ángulo agudo θ con el suelo, demostrar que las velocidades abstractas de A y B están en la razón $v_A/v_B = \text{tang}\,\theta$.

4. El sistema rígido $\mathcal{F}'$ tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a otro sistema $\mathcal{F}$. Si $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y, además P y Q coinciden con A y B de $\mathcal{F}'$ en el instante t, demostrar que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{d'\mathbf{u}}{dt}, \tag{8}$$

donde $d'\mathbf{u}/dt$ es la rapidez de cambio de u referida a $\mathcal{F}'$.

$$\left[\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}'_Q - \mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_P = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \frac{d'\mathbf{u}}{dt}.\right]$$

5. Si un punto recorre una curva en el espacio con velocidad unitaria ($ds/dt = 1$), demostrar que el triedro en movimiento TNB lleva la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \partial$, que es el vector de Darboux. [Cf. (29.8).]

6. **Aceleración de Coriolis.** Una partícula P tiene una velocidad $\mathbf{v}$ y una aceleración $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{a}'$, respectivamente, referidas a los sistemas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$. Si $\mathcal{F}'$ lleva una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a $\mathcal{F}$ y P coincide momentáneamente con el punto Q en $\mathcal{F}'$, demostrar que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}', \tag{9}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'. \tag{10}$$

[Sea A un origen fijo en $\mathcal{F}'$. Entonces, si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}' = \overrightarrow{AP}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} + \mathbf{r}'$ y, por lo tanto, de (8),

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}',$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}') + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'.$$

Cuando $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$, estas fórmulas nos dan $\mathbf{v}_Q$ y $\mathbf{a}_Q$. Al término $2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, de $\mathbf{a}$, se le llama la *aceleración de Coriolis* de P.

7. El movimiento de una partícula P a lo largo de una curva plana puede ser referido a un sistema de ejes rectangulares $\mathcal{F}'$ girando alrededor de O de tal manera que el eje x' pase siempre por P ($\mathbf{i}' = \mathbf{R}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{P}$). Asígnensele a P las coordenadas polares r, θ, con respecto al sis-

tema fijo $\mathcal{F}$ y dedúzcanse (32.8) y (32.9) de (9) y de (10), demostrando que:

(a) El movimiento de P relativo a $\mathcal{F}'$ está dado por

$$\mathbf{v}' = \frac{dr}{dt}\mathbf{R}, \qquad \mathbf{a}' = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{R};$$

(b) Si P coincide con el punto Q de $\mathcal{F}'$,

$$\mathbf{v}_Q = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P}, \qquad \mathbf{a}_Q = -\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 r\mathbf{R} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{P},$$

(c) La aceleración de Coriolis de P es

$$2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}\mathbf{P}.$$

Capítulo 4

Invariantes Diferenciales

36. Superficies. *Una superficie es un conjunto de puntos cuyas coordenadas son funciones de dos variables.* Así, las ecuaciones

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v) \tag{1}$$

representan una superficie. Las variables u y v se llaman *parámetros* o *coordenadas de la superficie* y cada pareja de valores u, v, dentro de una región determinada corresponde a un punto definido de la superficie. Si x, y, z, son funciones de $t = \varphi(u, v)$, las ecuaciones (1) representan una *curva*. A fin de excluir este caso, se requiere que la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \tag{2}$$

sea de *segundo orden;* entonces, al menos uno de sus determinantes de dos filas

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \qquad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \qquad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \tag{3}$$

no es idénticamente nulo. †

Sin embargo, los tres determinantes pueden anularse para ciertos puntos de la superficie. A tales puntos se les llama *singulares*, en contraste con los *puntos regulares*, donde al menos uno de los determinantes es diferente de cero.

Si $\mathbf{r} = [x, y, z]$, es el vector de posición de la superficie, las ecuaciones (1) pueden ser reemplazadas por una sola ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v); \tag{4}$$

---

† En el caso que se ha excluido, $x_u = x_t t_u$, $x_v = x_t t_v$, etc., y entonces A, B, C se hacen idénticamente nulos.

y la matriz será de segundo orden si

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [A, B, C] \neq \mathbf{0}. \tag{5}$$

Si hacemos $u = f(t)$, $v = g(t)$, en (2), obtenemos una curva sobre la superficie. A las curvas $v = b$, $u = a$, se les llama *curvas paramétricas* de la superficie en el punto $u = a$, $v = b$; sus ecuaciones vectoriales son

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, b), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(a, v).$$

Sus vectores tangentes son $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ y en cualquier punto regular, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, esto es, las tangentes no son paralelas y determinan un vector $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ que es normal a la superficie. Entonces, la superficie tiene una normal única en cada punto regular.

Ejemplo 1. Las ecuaciones

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v, \qquad y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = a \cos u \tag{6}$$

representan una esfera de radio a, con centro en el origen. Refiriéndonos a la Fig. 42*b*, vemos que $u = \theta$, es la colatitud medida desde el polo $+ z$, mientras que $v = \varphi$ es la longitud medida desde el plano xz. Las curvas paramétricas $u = a$, $v = b$, son paralelos de latitud y meridianos, respectivamente. La matriz (2) es ahora

$$\begin{pmatrix} a \cos u \cos v & a \cos u \operatorname{sen} v & -a \operatorname{sen} u \\ -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = a^2 \operatorname{sen} u \, [\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u].$$

El vector entre apréntesis rectangulares es normal a la esfera y, desde luego, *unitario normal:*

$$\mathbf{n} = [\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u].$$

Puesto que $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$ cuando sen $u = 0$, los polos $u = 0$ y $u = \pi$ son puntos singulares. Estos puntos, sin embargo, no son singularidades intrínsecas, sino debidas a la representación paramétrica; de hecho, las normales unitarias en los polos están correctamente dadas por $\mathbf{n}$.

En un punto regular u_0, v_0, uno de los jacobianos (3) es diferente de cero. Si $\delta(x, y)/\delta(u, v) \neq 0$, podemos resolver las dos primeras ecuaciones en (1) para u y para v en términos de x e y; † y, substituyendo estos valores en la tercera, obtenemos a z como función de x y de y:

$$z = f(x, y). \tag{7}$$

† *Advanced Calculus*, 85.

Esta ecuación representa también a la superficie, que tiene ahora la forma paramétrica

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v). \tag{7}'$$

Finalmente, una superficie también está dada por la ecuación

$$F(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Ésta puede resolverse para z en la proximidad de cualquier punto para el cual $F_z \neq 0$; obtenemos entonces de nuevo una ecuación de la forma (7).

Tres funciones cualesquiera

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \tag{9}$$

que reduzcan a (8) a una identidad en t, corresponden a una curva de superficie que tenga como ecuaciones a (9). Si substituimos a (9) en (8) y derivamos la ecuación que resulta con respecto a t, obtenemos

$$F_x x_t + F_y y_t + F_z z_t = 0. \tag{10}$$

Ahora $[x_t, y_t, z_t]$, representa un vector tangente a la curva (9) en un punto $P(t)$ y, puesto que (10) es válida para *todas* las curvas de superficie que pasan por este punto, el vector

$$\nabla F = [F_x, F_y, F_z] \tag{11}$$

es normal a todas las curvas de superficie que pasan por P y, por lo tanto, a la misma superficie $F = 0$. Este vector, que se denota por ∇F, se llama el *gradiente* de la función $F(x, y, z)$.

Si $Q(x, y, z)$ es cualquier punto en el plano tangente a la superficie (8) en el punto $R_0(x_0, y_0, z_0)$, el vector $\mathbf{q} - \mathbf{r}_0$, es perpendicular a ∇F en R_0; por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie en R_0 es

$$(\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \cdot (\nabla F)_0 = 0. \tag{12}$$

Ejemplo 2. El plano

$$F = Ax + By + Cz + D = 0$$

es normal a $\nabla F = [A, B, C]$

Ejemplo 3. El elipsoide

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{13}$$

tiene el gradiente

$$\nabla F = 2[x/a^2, y/b^2, z/c^2].$$

La ecuación de un plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) es, por lo tanto,

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0;$$

o, puesto que (x_0, y_0, z_0) satisface a (13),

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0.$$

PROBLEMAS

1. Si $u = r$, $v = \varphi$, son coordenadas polares en el plano xy, demostrar que la *superficie de revolución* que se obtiene al girar la curva $z = f(x)$, $y = 0$, alrededor del eje z, tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = f(u).$$

¿Cuáles son las curvas paramétricas? Encontrar el vector normal a la superficie.

2. Una línea recta que corta al eje z formando siempre ángulos rectos, se gira alrededor y se mueve a lo largo de este eje. La superficie generada de esta manera se llama *conoide*. Si $u = r$, $v = \varphi$, son coordenadas polares en el plano xy y la altura de la recta está dada en términos del ángulo girado, $z = f(v)$, demostrar que el conoide tiene como ecuaciones paramétricas a

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = f(v).$$

En particular, cuando dz/dv es constante, el conoide es un *helizoide recto* (una rampa espiral):

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = av.$$

¿Cuáles son las curvas paramétricas?

3. Las ecuaciones paramétricas de una curva Γ en el espacio son

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = h(u).$$

¿Cuáles son las superficies representadas por las ecuaciones y qué significado tiene v en cada caso?

(i) $x = f(u) + v \cos \alpha$, $\quad y = g(u) + v \cos \beta$, $\quad z = h(u) + v \cos \gamma$;
(ii) $x = v f(u)$, $\quad y = v g(u)$, $\quad z = v h(u)$?

¿Cuáles son las curvas paramétricas $u = \text{constante}$?

4. Dar las ecuaciones paramétricas para el elipsoide (13), tomando como modelo las ecuaciones (6) para la esfera.

5. Demostrar que las ecuaciones

$$x = f(u) + av, \qquad y = g(u) + bv, \qquad z = h(u) + cv,$$

representan todas ellas cilindros cuyas generatrices son paralelas al vector $[a, b, c]$. ¿Cuáles son las curvas paramétricas $u = \text{constante}$?

6. Demostrar que las ecuaciones

$$x = vf(u) + a, \qquad y = vg(u) + b, \qquad z = vh(u) + c,$$

representan todas ellas conos cuyos vértices están en el punto (a, b, c). ¿Cuáles son las curvas paramétricas $u =$ constante?

7. Demostrar que la distancia d más corta del punto $R_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

8. Demostrar que la superficie

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = 4u^2$$

es el cilindro parabólico $z = (x + y)^2$. Encontrar la dirección de sus generatrices.

37. Derivada direccional. Un escalar o un vector que esté definido unívocamente en todo punto de una región se dice que es una *función de punto.*

Si el punto $P(x, y, z)$ está dado por el vector de posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, denotaremos a una función de punto escalar mediante $f(\mathbf{r})$ o $f(x, y, z)$ y a una función de punto vectorial mediante $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ o $\mathbf{f}(x, y, z)$.

Consideremos ahora una función escalar de punto $f(x, y, z)$ en la vecindad de un punto P_0, diferenciable y continua en esa vecindad. Un radio (o semirrecta) que pase por P_0 en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{e} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$$

tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{e} \quad \text{donde} \quad s = |PP_0| > 0.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas del radio son

$$(1) \quad x = x_0 + s \cos \alpha, \qquad y = y_0 + s \cos \beta, \qquad z = z_0 + s \cos \gamma.$$

A lo largo de este radio, $f(x, y, z)$ es una función de s solamente, cuya derivada por la derecha puede calcularse de la siguiente manera:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

o, en vista de las ecuaciones (1),

$$\frac{df}{ds} = \cos\alpha\, f_x + \cos\beta\, f_y + \cos\gamma\, f_z. \dagger \tag{2}$$

Si se calculan f_x, f_y, f_z en el punto (x_0, y_0, z_0), la fórmula (2) nos da *derivada direccional* de $f(x, y, z)$ en el punto P_0 y en la dirección de $\mathbf{e}$.

Puesto que los cosenos directores de $\mathbf{e}$ son iguales a $\mathbf{e}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}$, podemos entonces escribir (2) también de la siguiente manera

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{e}\cdot(\mathbf{i}f_x + \mathbf{j}f_y + \mathbf{k}f_z), \tag{3}$$

en la que el primer factor indica la dirección de la derivada, mientras que el segundo, el *gradiente*

$$\nabla f = \mathbf{i}f_x + \mathbf{j}f_y + \mathbf{k}f_z \tag{4}$$

(36.11)

depende solamente del punto donde se calcule ∇f. Así, la fórmula

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{e}\cdot\nabla f = |\nabla f|\cos(\nabla f, \mathbf{e}) \tag{5}$$

establece una correspondencia biunívoca entre las direcciones $\mathbf{e}$ en un punto y df/ds, las derivadas direccionales en ese punto. En efecto, el *vector* ∇f reemplaza a la infinidad de *escalares* df/ds.

De (5), vemos que en un punto dado P_0 el valor máximo de df/ds se adquiere cuando $\mathbf{e} = \mathbf{n}$, un vector unitario en la dirección de ∇f, y este máximo es $|\nabla f|$. Más aún, ∇f en P_0 es normal a la superficie de nivel

$$f(x, y, z) = \text{ constante} = f(x_0, y_0, z_0) \tag{6}$$

que pasa por P_0 (§36). Así, la *dirección* de ∇f en P_0 es normal

---

† Para una función $f(x, y)$ de dos variables, la dirección $\mathbf{e}$ en el plano xy tiene como cosenos directores a

$$\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha, \quad \cos\gamma = 0;$$

y

$$\frac{df}{ds} = \cos\alpha\, f_x + \operatorname{sen}\alpha\, f_y. \tag{2}$$

a la superficie de nivel (6) y en el sentido en que aumenta f; su magnitud

$$|\nabla f| = \mathbf{n} \cdot \nabla f = \frac{df}{dn}, \tag{7}$$

es la derivada de f en esa dirección. Por lo tanto, en términos de esta *derivada normal*, tenemos una expresión para el gradiente

$$\nabla f = \mathbf{n} \frac{df}{dn} \tag{8}$$

enteramente independiente del sistema de coordenadas. Puesto que

$$\nabla x = \mathbf{i}, \qquad \nabla y = \mathbf{j}, \qquad \nabla z = \mathbf{k}, \tag{9}$$

las ecuaciones

$$\nabla f = \nabla x f_x + \nabla y f_y + \nabla z f_z, \tag{10}$$

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2, \tag{11}$$

son válidas en cualquier sistema de coordenadas rectangulares.

Si reemplazamos a x, y, z por funciones de otras variables independientes u, v, w, entonces $f(x, y, z)$ se convierte en $F(u, v, w)$. A lo largo del radio (1)

$$\frac{dF}{ds} = \frac{du}{ds}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{dv}{ds}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{dw}{ds}\frac{\partial F}{\partial w},$$

o, en vista de (5)

$$\mathbf{e} \cdot \nabla F = \mathbf{e} \cdot (\nabla u F_u + \nabla v F_v + \nabla w F_w).$$

Pero, puesto que esto es válido para todos los vectores $\mathbf{e}$,

$$\nabla F = \nabla u F_u + \nabla v F_v + \nabla w F_w. \tag{12}$$

Esta expresión para el gradiente en *coordenadas curvilíneas* u, v, w incluye obviamente a (10).

En particular, para una función $F(u)$ de la sola variable u,

$$\nabla F(u) = \frac{dF}{du} \nabla u. \tag{13}$$

Por ejemplo, si r denota la distancia desde el origen,

$$\nabla F(r) = \frac{dF}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{14}$$

Ejemplo 1. La distancia polar

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

tiene el gradiente

$$\nabla r = [x/r,\ y/r,\ z/r] = \mathbf{r}/r, \tag{15}$$

o sea, el vector unitario radial en la dirección $\overrightarrow{OP}$. Este resultado se deduce también de la definición intrínseca (8), puesto que las superficies de nivel de r son esferas con centro en el orign, para las cuales

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \frac{dr}{dn} = \frac{dr}{dr} = 1.$$

Ejemplo 2. Si el punto P tiene como coordenadas polares$r$, φ, tenemos

$$\nabla r = \mathbf{R}, \qquad \nabla\varphi = \mathbf{P}/r, \tag{16}$$

donde $\mathbf{P}$ es el vector unitario 90° adelante de $\mathbf{R}$ (§28). Estos resultados se deducen inmediatamente de (§8). Por ejemplo las curvas de nivel son radios que pasan por el origen, para los cuales

$$\mathbf{n} = \mathbf{P}, \qquad \frac{d\varphi}{dn} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta\varphi}{r\,\mathrm{sen}\,\Delta\varphi} = \frac{1}{r}.$$

Si $f(r, \varphi) = c$ es la ecuación de una curva en coordenadas polares, entonces una normal a la curva en cualquier punto está dada por

$$\nabla f(r, \varphi) = f_r \nabla r + f_\varphi \nabla\varphi = f_r \mathbf{R} + \frac{f_\varphi}{r}\mathbf{P}. \tag{17}$$

PROBLEMAS

1. Si $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, encontrar

(*a*) ∇f en (2, 3);
(*b*) df/ds en (2, 3) a lo largo de un radio inclinado + 45° con respecto al eje x;
(*c*) la dirección y magnitud de df/ds en (2, 3) cuando su valor es máximo.

2. Si $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, encontrar

(*a*) ∇f en (1, 1, 3);
(*b*) df/ds en (1, 1, 3) en la dirección de [1, 1, 1];
(*c*) la derivada normal df/dn en (1, 1, 3);
(*d*) las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $xy + yz + zx = 7$ en (1, 1, 3).

3. Si $f(r, \varphi) = r - 2a$ sen φ, encontrar ∇f en el punto (r, φ). ¿Cuál es la magnitud de la derivada normal en (r, θ)?

4. Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones que satisfacen las ecuaciones $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, demostrar que

(*a*) $\nabla u = \nabla v \times \mathbf{k}$, $\nabla v = \mathbf{k} \times \nabla u$.
(*b*) En cualquier punto (x, y), $du/ds = dv/ds'$, donde s' es un radio 90° adelante de s.

5. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demostrar que

6. Demostrar que los sistemas de hipérbolas equiláteras $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$, se cortan en ángulos rectos.

[La normal a la curva $f(x, y) = c$ es paralela a ∇f.]

7. Demostrar que los sistemas de cardioides $r = a(1 - \cos \varphi)$, $r = b(1 + \cos \varphi)$ se cortan en ángulos rectos. [Cf. (16).]

8. Demostrar que la curva $f(r_1, r_2) = c$ en coordenadas bipolares tiene una normal paralela a $f_{r1}\mathbf{R}_1 + f_{r2}\mathbf{R}_2$.

Demostrar que los sistemas de elipses e hipérbolas confocales $r_1 + r_2 = a$, $r_1 - r_2 = b$, se cortan en ángulos rectos.

9. Demostrar que los sistemas de círculos coaxiales $r_1/r_2 = a$, $\varphi_2 - \varphi_1 = b$, se cortan en ángulos rectos.

38. Gradiente de un vector. Una función vectorial de punto $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ está dada por tres funciones escalares de punto f_1, f_2 y f_3 que forman sus componentes rectangulares:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2 + \mathbf{k}f_3. \tag{1}$$

Si estas tres funciones son derivables, decimos que $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es derivable.

Si $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es derivable, podemos calcular su derivada direccional en P_0 y en la dirección $\mathbf{e}$ de la misma manera que en §37:

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \cos\alpha\,\mathbf{f}_x + \cos\beta\,\mathbf{f}_y + \cos\gamma\,\mathbf{f}_z. \tag{2}$$

Si reemplazamos los cosenos directores por $\mathbf{e}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}$, podemos escribir simbólicámente

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{e}\cdot(\mathbf{i}\mathbf{f}_x + \mathbf{j}\mathbf{f}_y + \mathbf{k}\mathbf{f}_z). \tag{3}$$

Aquí, la cantidad entre paréntesis tiene la misma forma que el gradiente de un escalar. Pero, puesto que $\mathbf{f}$ es un *vector*, el *gradiente*

$$\nabla\mathbf{f} = \mathbf{i}\mathbf{f}_x + \mathbf{j}\mathbf{f}_y + \mathbf{k}\mathbf{f}_z \tag{4}$$

no tiene todavía un significado, puesto que consiste de la suma de tres parejas ordenadas de vectores. A una expersión de este tipo la llamaremos una *diádica*, mientras que a las parejas ordenadas de vectores les llamamos *diadas*. Podríamos ahora desarrollar un álgebra de diádicas, definiendo equivalencia, adición y multiplicación, † pero para nuestros propósitos es innecesario. Consideraremos a $\nabla\mathbf{f}$, definido mediante (4) me-

† Ver *Vector and Tensor Analysis*, del autor, Cap. IV, para un desarrollo sistemático del álgebra de las diádicas.

ramente como un *operador* que establece una correspondencia biunívoca entre las direcciones $\mathbf{e}$ en un punto, y df/ds, las derivadas direccionales en ese punto:

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{e} \cdot \nabla \mathbf{f}. \tag{5}$$

En efecto, la *diádica* $\nabla \mathbf{f}$ substituye a una infinidad de vectores df/ds.

Llamaremos diádica a cualquier "suma" de díadas: así, la diádica

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n$$

representa una diádica general en la que los vectores $\boldsymbol{\alpha}_i$ son *antecedentes* y los vectores $\mathbf{b}_i$, *consecuentes*. La diádica

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n\mathbf{a}_n$$

se llama la *conjugada* de $\mathbf{P}$, y, si (con la igualdad definida de la manera en que se hace abajo)

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_c, \qquad \mathbf{P} \text{ es simétrica},$$

$$\mathbf{P} = -\mathbf{P}_c, \qquad \mathbf{P} \text{ es antisimétrica}.$$

Las diádicas simétricas y antisimétricas son especialmente importantes puesto que cualquier diádica $\mathbf{P}$ puede ser expresada como la suma de una diádica simétrica y otra antisimétrica exactamente de la misma manera:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} + \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}. \tag{6}$$

La demostración se deduce de $\mathbf{P}_{cc} = \mathbf{P}$ y se deja al lector.

Cuando los vectores se multiplican vectorialmente en una diádica $\mathbf{P} = \Sigma \boldsymbol{\alpha}_i\mathbf{b}_i$ se forman nuevas diádicas; así, definimos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{P} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_i)\mathbf{b}_i, \qquad \mathbf{P} \times \mathbf{r} = \sum \mathbf{a}_i(\mathbf{b}_i \times \mathbf{r}). \tag{7}$$

DEFINICIÓN. *Dos diádicas son iguales cuando ambas transforman a un vector arbitrario de la misma manera:*

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \text{ cuando y sólo cuando } \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}$$

para todo vector $\mathbf{u}$.

De esta definición deducimos fácilmente el

TEOREMA. Si $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}$ para tres vectores no coplanares $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, entonces $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

Demostración. Como en §10, podemos expresar a cualquier vector u en la forma $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$. Entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{3} u^i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{3} u^i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{Q}.$$

Cuando f es el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$, $\mathbf{r}_y = \mathbf{j}$, $\mathbf{r}_z = \mathbf{k}$, y, de (4),

$$\nabla\mathbf{r} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} = \mathbf{I}. \tag{8}$$

La diádica I se llama *idemfactor* (del latín *idem* = el mismo) porque transforma a cualquier vector u en él mismo:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{para todo } \mathbf{u}; \tag{9}$$

puesto que, de (15.10)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{ii} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{jj} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{kk} = \mathbf{ii}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{jj}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{kk}\cdot\mathbf{u}. \tag{10}$$

Más aún, puesto que $u^i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}^i$, tenemos, de (16.1)

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}^i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{u}. \tag{11}$$

Obtenemos entonces la forma más general de I:

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}^1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}^3. \tag{12}$$

Finalmente, para justificar el uso del signo más entre díadas, definimos la suma diádica P + Q mediante

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{Q} \quad \text{para todo } \mathbf{u}. \tag{13}$$

Así, para sumar dos diádicas, lo único que hacemos es sumar las díadas de una a las díadas de la otra.

La diádica nula tiene la propiedad

$$\mathbf{P} + \mathbf{O} = \mathbf{P}; \tag{14}$$

y, de (13), tenemos también

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{O} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{u}. \tag{15}$$

Ejemplo. La diádica $\mathbf{a}\times\mathbf{I} = \mathbf{I}\times\mathbf{a}$; puesto que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{I}) &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{ii} + \mathbf{a}\times\mathbf{jj} + \mathbf{a}\times\mathbf{kk})\\ &= (\mathbf{u}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) = \mathbf{u}\times\mathbf{a};\\ \mathbf{u}\cdot(\mathbf{I}\times\mathbf{a}) &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{ii}\times\mathbf{a} + \mathbf{jj}\times\mathbf{a} + \mathbf{kk}\times\mathbf{a})\\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{ii} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{jj} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{kk})\times\mathbf{a} = \mathbf{u}\times\mathbf{a}.\end{aligned}$$

39. Invariantes de una diádica. Por definición, la ecuación diádica $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ es equivalente a las ecuaciones vectoriales

(1) $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \quad \text{para todo}$$

Por lo tanto, es también equivalente a las ecuaciones escalares

(2) $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \quad \text{para todo}$$

o a las ecuaciones vectoriales

(3) $$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \quad \text{para todo}$$

En estas ecuaciones, u se usa como *prefactor* y v como *postfactor.*

De (1) y (3) tenemos las leyes distributivas para las diádicas:

(4) (5) $$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \qquad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Así, (4) se deduce inmediatamente de

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{ac} + \mathbf{bc}).$$

Usando estas leyes, podemos expresar una diádica $\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$ en varias formas substituyendo sumas de vectores $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ y desarrollando o agrupando términos. En todos estos cambios, sin embargo, hay ciertas cantidades formadas por los vectores de la diádica que permanecen iguales. Entre estas *invariantes* de P, las más importantes son la escalar y la vectorial

(6) (7) $$P_s = \sum \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i, \qquad \mathbf{p} = \sum \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$$

que se obtienen colocando un punto o una cruz entre los vectores de cada diádica de P.

TEOREMA 1. *La diádica* $\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$ *tiene la invariante escalar* $P_s = \Sigma \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i$ *y la invariante vectorial* $\mathbf{p} = \Sigma \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$.

Demostración. Hagamos $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$. De (10.13),

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$= \mathbf{i} \cdot (\mathbf{uv}) \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{uv}) \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{uv}) \cdot \mathbf{k};$$

y, por lo tanto,

$$P_s = \mathbf{i} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad Q_s = \mathbf{i} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k}.$$

Puesto que los términos correspondientes en estas sumas son iguales, por (2), $P_s = Q_s$.

De nuevo, de (11.8)

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{uv}) \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{uv}) \cdot \mathbf{j};$$

y entonces, las primeras componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son

$$p_1 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{j}, \qquad q_1 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}.$$

Puesto que los términos correspondientes en la derecha son iguales, por (2), $p_1 = q_1$; análogamente $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$ y, por lo tanto, $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

TEOREMA 2. *Las invariantes escalar y vectorial de la suma de dos diádicas son iguales a la suma de sus invariantes respectivas.*

Demostración. Si $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$, es obvio que

$$R_s = P_s + Q_s, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q}.$$

Es esta propiedad la que da especial importancia a estas invariantes en la geometría y en la física.

Ejemplo. De (38.8) vemos que las invariantes de $\mathbf{I}$ son

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 3, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$$

y por lo tanto, de (38.12), nosotros deducimos que

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = 3 \qquad \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}_3 = 0$$

PROBLEMAS

1. Si $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P} = \mathbf{f}_i (i = 1, 2, 3)$, demostrar que $\mathbf{P} = \mathbf{e}^1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{e}^2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}^3 \mathbf{f}_3$.

2. Si $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{g}_i (i = 1, 2, 3)$, demostrar que $\mathbf{P} = \mathbf{g}_1 \mathbf{e}^1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{e}^2 + \mathbf{g}_3 \mathbf{e}^3$.

3. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son vectores no coplanares arbitrarios, demostrar que cualquier diádica puede expresarse como la suma de tres díadas que tengan a $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, bien como antecedentes o como consecuentes.

4. Demostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{I}$ es una diádica antisimétrica.

5. Encontrar las invariantes de $\mathbf{a} \times \mathbf{I}$.

6. Demostrar que $\mathbf{ab} - \mathbf{ba} = -\frac{1}{2}\mathbf{I} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

7. Si la diádica $\mathbf{P}$ es antisimétrica y tiene la invariante vectorial $\mathbf{p}$, demostrar que $\mathbf{P} = -\frac{1}{2}\mathbf{I} \times \mathbf{p}$. Demostrar que $\mathbf{P}$ transforma a todos los vectores en vectores perpendiculares a $\mathbf{p}$.

8. Demostrar que la invariante vectorial de cualquier diádica simétrica es nula.

9. Demostrar que la invariante escalar de cualquier diádica antisimétrica es nula.

10. El producto diádico $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se define mediante la ecuación

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}) \quad \text{para todo} \tag{8}$$

Demostrar a partir de esta definición, que la multiplicación diádica es

Asociativa: $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})$;

Distributiva: $(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$;

pero, en general, no conmutativa: $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$.

[*Vector and Tensor Analysis*, §65.]

11. De la definición (8) deducir el producto de díadas:

$$(\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{ad}. \tag{9}$$

12. Usar (9) para demostrar que

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})_c = \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{P}_c. \tag{10}$$

13. Demostrar a partir de (8) y (10), que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q} \quad \text{para todo} \tag{11}$$

14. El idemfactor I se llama frecuentemente *diádica unitaria*. Justificar este término demostrando que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}. \tag{12}$$

15. Demostrar que, en *todos* los casos,

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b}\,\mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c}\,\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{abc}]\mathbf{I}.$$

16. Si $\mathbf{P}^n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdots$ hasta n factores, demostrar que

$$\mathbf{I} \times \mathbf{k} = \mathbf{ji} - \mathbf{ij}, \qquad (\mathbf{I} \times \mathbf{k})^2 = -\mathbf{ii} - \mathbf{jj},$$
$$(\mathbf{I} \times \mathbf{k})^3 = \mathbf{ij} - \mathbf{ji}, \qquad (\mathbf{I} \times \mathbf{k})^4 = \mathbf{ii} + \mathbf{jj}.$$

40. Divergencia y rotacional. El gradiente $\nabla \mathbf{f}$ (o grad f) de una función vectorial de punto es una diádica cuyos invariantes son de la mayor importancia en la geometría y en la física matemática.

La invariante escalar, que se forma multiplicando escalarmente los vectores díadas de $\nabla \mathbf{f}$, se llama la *divergencia* de f y se escribe $\nabla : \mathbf{f}$ o div f.

La invariante vectorial, que se forma multiplicando vectorialmente los vectores díadas de $\nabla \mathbf{f}$, se llama la *rotacional* o *curl* de f y se escribe $\nabla \times \mathbf{f}$, rot f o curl f. †

---

† *Curl* es el término más usado por los autores británicos y norteamericanos, *rotacional* por los europeos. A fin de lograr una notación uniforme (puesto que el lenguaje de las matemáticas es universal), escribiremos rot f en este libro aun cuando podamos decir "curl".

Suprimiremos la palabra *curl* en la versión española, pues rotacional es bastante expresiva. (N. del T.)

En términos de coordenadas rectangulares, tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \mathbf{f} = \operatorname{grad} \mathbf{f} = \mathbf{i}\,\mathbf{f}_x + \mathbf{j}\,\mathbf{f}_y + \mathbf{k}\,\mathbf{f}_z, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{f} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{f}_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_z, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{i} \times \mathbf{f}_x + \mathbf{j} \times \mathbf{f}_y + \mathbf{k} \times \mathbf{f}_z. \tag{3}$$

Si se expresa f en términos de sus componentes rectangulares

$$\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k},$$

f_1, f_2, f_3 son funciones escalares de x, y y z y $\nabla \mathbf{f}$ asume la forma de nueve términos:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{f} = {} & D_x f_1\,\mathbf{ii} + D_x f_2\,\mathbf{ij} + D_x f_3\,\mathbf{ik} + \\ & D_y f_1\,\mathbf{ji} + D_y f_2\,\mathbf{jj} + D_y f_3\,\mathbf{jk} + \\ & D_z f_1\,\mathbf{ki} + D_z f_2\,\mathbf{kj} + D_z f_3\,\mathbf{kk}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $D_x = \delta/\delta x$, etc. Esta forma se abrevia frecuentemente por medio de la matriz

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} D_x f_1 & D_x f_2 & D_x f_3 \\ D_y f_1 & D_y f_2 & D_y f_3 \\ D_z f_1 & D_z f_2 & D_z f_3 \end{pmatrix}, \tag{4}'$$

en la que las nueve díadas unitarias ii, ij, $\cdots$, kk se omiten. † Poniendo puntos y cruces entre los vectores de (4), las invariantes se convierten en

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{6}$$

---

† Cuando las diádicas se escriben en forma matricial, su álgebra es la misma que el álgebra de matrices. Véase *Vector and Tensor Analysis*, §78. Nótese que el idemfactor I se convierte en la matriz unitaria y la diádica unitaria en la matriz nula.

La última se puede recordar fácilmente en la forma de determinante de (11.9):

$$\nabla\times\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Para el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, tenemos

$$\nabla\mathbf{r} = \mathbf{i}\mathbf{r}_x + \mathbf{j}\mathbf{r}_y + \mathbf{k}\mathbf{r}_z = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}$$

como idemfactor. Por lo tanto

$$\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{r} = 3, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{r} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Cuando $\mathbf{f} = \nabla\varphi$, el gradiente de un escalar $\varphi(x, y, z)$, tenemos

$$f_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad f_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad f_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

con estas componentes, (5) y (6) dan

$$\operatorname{div}\nabla\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}; \tag{9}$$

$$\operatorname{rot}\nabla\varphi = \mathbf{0}. \tag{10}$$

En (9), el operador diferencial div ∇ o $\nabla\cdot\nabla$ se llama *laplaciano* y se escribe con frecuencia como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

La demostración de (10) depende de la igualdad de las segundas derivadas combinadas de φ (como $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$); este es el caso siempre que las derivadas en cuestión sean continuas. †

Cuando $\mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{g}$, el rotacional de un vector $\mathbf{g}(x, y, z)$,

$$f_1 = \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \qquad f_2 = \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \qquad f_3 = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}.$$

en este caso, (5) y (6) dan

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{g} = 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{g} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{g} - \nabla^2\mathbf{g}. \tag{12}$$

† *Advanced Calculus*, p. 163.

Las demostraciones son sencillas y dependen de la igualdad de las segundas derivadas mezcladas. En (12) por ejemplo, la primera componente de rot rot g es

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)-\nabla^2 g_1=\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathbf{g}-\nabla^2 g_1.$$

Las cuatro identidades desde (9) hasta (12) son de la mayor importancia. Cuando se escriben como

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi, \tag{9}$$

$$\nabla\times\nabla\varphi=\mathbf{0}, \tag{10}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{g}=0, \tag{11}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{g})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{g})-\nabla^2\mathbf{g}, \tag{12}$$

pueden ser recordadas tratando a ∇ formalmente como vector. En (10) $\nabla\times\nabla=0$; en (11), ∇ interviene dos veces en el producto de paralelepípedo y en (12), el teorema de desarrollo (12.1) da el resultado correcto. Así, en forma simbólica, estas fórmulas básicas son más fáciles de recordarse que de ser olvidadas.

Ejemplo 1. El gradiente de la función vectorial

$$\mathbf{f}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$$

es la diádica

$$\nabla\mathbf{f}=\mathbf{ij}+\mathbf{jk}+\mathbf{ki} \tag{1},$$

o, en forma matricial (4)′,

$$\nabla\mathbf{f}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{div}\mathbf{f}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}=\mathbf{i}\times\mathbf{j}+\mathbf{j}\times\mathbf{k}+\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}+\mathbf{i}+\mathbf{j} \tag{3}$$

o podemos calcular div f de (5) y rot f de (6). Más aún, la función escalar

$$|\mathbf{f}|=(z^2+x^2+y^2)^{1/2}$$

tiene el gradiente

$$\nabla|\mathbf{f}|=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{37.4}$$

Ejemplo 2. La velocidad en cualquier punto P de cualquier cuerpo rígido está dada por (35.1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} = \overrightarrow{AP}).$$

En cualquier instante dado t, $\mathbf{v}$ es una función vectorial de punto, y, de (3),

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \operatorname{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{i} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right) + \text{cycl} \\ &= \mathbf{i} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + \text{cycl} \\ &= \boldsymbol{\omega} - \omega_1 \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} - \omega_2 \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} - \omega_3 \mathbf{k} \\ &= 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

En cualquier instante, la distribución de la velocidad $\mathbf{v}$ *en un cuerpo rígido tiene un rotacional igual al doble de su velocidad angular instantánea* $\boldsymbol{\omega}$.

41. Fórmulas de producto. Hay que notar que

$$\operatorname{div} (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{div} \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{rot} \mathbf{f} + \operatorname{rot} \mathbf{g}. \tag{2}$$

Aplicamos en seguida las ecuaciones de definición (40.1-3) a varios productos de funciones.

Si λ es un escalar y $\mathbf{f}$ una función vectorial de punto, tenemos

$$\nabla(\lambda \mathbf{f}) = (\nabla \lambda)\mathbf{f} + \lambda \nabla \mathbf{f}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} (\lambda \mathbf{f}) = (\nabla \lambda) \cdot \mathbf{f} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{f}, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} (\lambda \mathbf{f}) = (\nabla \lambda) \times \mathbf{f} + \lambda \operatorname{rot} \mathbf{f}. \tag{5}$$

De (40.1), tenemos

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda \mathbf{f}) &= \mathbf{i}(\lambda_x \mathbf{f} + \lambda \mathbf{f}_x) + \text{cycl} \\ &= (\mathbf{i}\lambda_x + \mathbf{j}\lambda_y + \mathbf{k}\lambda_z)\mathbf{f} + \lambda(\mathbf{i}\mathbf{f}_x + \mathbf{j}\mathbf{f}_y + \mathbf{k}\mathbf{f}_z), \end{aligned}$$

que es igual a (3). Esto nos da (4) y (5) poniendo puntos y cruces entre los vectores díadas.

Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones vectoriales de punto,

$$\operatorname{div} (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g}, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g} + \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{g} - \mathbf{g} \operatorname{div} \mathbf{f}. \tag{7}$$

Damos la demostración de (7): de (40.3),

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) &= \mathbf{i}\times(\mathbf{f}_x\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\mathbf{g}_x) + \text{cycl}\\ &= (\mathbf{g}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{f}_x - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_x)\,\mathbf{g} + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{g}_x)\,\mathbf{f} - (\mathbf{f}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{g}_x + \text{cycl}\\ &= \mathbf{g}\cdot\nabla\mathbf{f} - (\operatorname{div}\mathbf{f})\,\mathbf{g} + (\operatorname{div}\mathbf{g})\,\mathbf{f} - \mathbf{f}\cdot\nabla\mathbf{g}.\end{aligned}$$

Demostramos en seguida que

$$(\nabla\mathbf{f})\cdot\mathbf{g} - \mathbf{g}\cdot(\nabla\mathbf{f}) = \mathbf{g}\times\operatorname{rot}\mathbf{f}; \tag{8}$$

el miembro izquierdo es igual a

$$\mathbf{i}(\mathbf{f}_x\cdot\mathbf{g}) - (\mathbf{g}\cdot\mathbf{i})\mathbf{f}_x + \text{cycl} = \mathbf{g}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{f}_x) + \text{cycl} = \mathbf{g}\times\operatorname{rot}\mathbf{f}.$$

Podemos ahora demostrar que

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{g}\cdot\nabla\mathbf{f} + \mathbf{g}\times\operatorname{rot}\mathbf{f} + \mathbf{f}\cdot\nabla\mathbf{g} + \mathbf{f}\times\operatorname{rot}\mathbf{g}; \tag{9}$$

puesto que, de (40.1),

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{i}(\mathbf{f}_x\cdot\mathbf{g} + \mathbf{g}_x\cdot\mathbf{f}) + \text{cycl} = (\nabla\mathbf{f})\cdot\mathbf{g} + (\nabla\mathbf{g})\cdot\mathbf{f},$$

lo que, en vista de (8), nos da (9).

Ejemplo 1. *La función* $1/r$ *es una solución de la ecuación de Laplace:*

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \operatorname{div}\nabla\frac{1}{r} = 0. \tag{10}$$

Puesto que, de (37.14),

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3};$$

y, de (4)

$$\operatorname{div}\nabla\frac{1}{r} = -\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^3} - \mathbf{r}\cdot\left(\frac{-3\,\mathbf{r}}{r^4}\frac{}{r}\right) = 0.$$

Ejemplo 2. Si u y v son funciones escalares,

$$\operatorname{div}(\nabla u\times\nabla v) = 0. \tag{11}$$

Puesto que $\operatorname{rot}\nabla u = \operatorname{rot}\nabla v = 0$, esto se deduce inmediatamente de (6).

PROBLEMAS

1. Encontrar el gradiente de los vectores

$$\mathbf{f} = [x - y, y - z, z - x],$$

$$\mathbf{g} = [x^2 + yz, y^2 + zx, z^2 + xy],$$

$$\mathbf{h} = [yz^2, zx^2, xy^2],$$

en forma matricial y encontrar su divergencia y rotacional.

2. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, encontrar

(a) (a) ∇r^2 y $\nabla^2 r^2$; (b) ∇r^{-1} y $\nabla^2 r^{-1}$.

3. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, demostrar que $\nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{I} \times \mathbf{a}$.

4. Si u es una función escalar de punto, demostrar que rot $(f(u)\nabla u) = 0$. Por lo tanto, demostrar que rot $(f(r)\mathbf{r}) = 0$.

5. Si R y P son los vectores unitarios de §28 en el plano xy y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ demostrar que

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{1}{r}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{R} = 0; \qquad \operatorname{div} \mathbf{P} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{P} = \frac{\mathbf{k}}{r}.$$

6. Si $r = \sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}$, demostrar que

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}.$$

7. Si $\nabla^2 f(r) = 0$, encontrar $f(r)$.

8. Si $\mathbf{r}/r$ es el vector radial unitario en el espacio, demostrar que

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r}, \qquad \operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0.$$

9. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, demostrar que

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}, \qquad \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0, \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}.$$

10. Si $\mathbf{e}$ es un vector unitario, demostrar que

$$\operatorname{div}[(\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{e}] = 2, \qquad \operatorname{rot}[(\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{e}] = 0.$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{e} = 1, \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{e} = 0;$$

42. Coordenadas curvilíneas. Cambiemos de coordenadas rectangulares (x, y, z) a coordenadas curvilíneas (u, v, w) por medio de las ecuaciones

$$(1) \qquad x = F(u, v, w), \qquad y = G(u, v, w), \qquad z = H(u, v, w),$$

donde F, G, y H tienen sus primeras derivadas parciales continuas en una cierta región donde su jacobiano es diferente de cero. Las funciones, por lo tanto, no están conectadas por ninguna relación funcional. Puesto que el jacobiano es continuo, su signo no puede cambiar en la región y, para ser explícitos, supondremos que el jacobiano

$$(2) \qquad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_w > 0.$$

Esto no envuelve una pérdida de generalidad, puesto que si el jacobiano fuese negativo, un intercambio de v y w (por ejemplo), lo haría positivo.

Bajo esta hipótesis, las ecuaciones (1) tienen una inversa

única en alguna vecindad I_0 de cualquier punto (x_0, y_0, z_0) de la región:

$$u = f(x, y, z), \qquad v = g(x, y, z), \qquad w = h(x, y, z); \tag{3}$$

y f, g, h tienen también sus primeras derivadas parciales continuas. † En la vecindad I_0 la correspondencia $(x, y, z) \leftrightarrow (u, v, w)$ es biunívoca, de tal manera que un punto $P(x, y, z)$ puede especificarse también por los tres números (u, v, w) dados por (3).

Cuando se dan (u_0, v_0, w_0), P_0 es el punto de intersección de las tres superficies

$$f(x, y, z) = u_0, \qquad g(x, y, z) = v_0, \qquad h(x, y, z) = w_0.$$

Estas se intersectarán en tres curvas, las curvas coordenadas, a lo largo de las cuales solamente puede variar una de las tres cantidades u, v, w. Por esta razón, a u, v, w, se les llama coordenadas curvilíneas, como distinción de las coordenadas rectangulares x, y, z, para cuyo caso las coordenadas curvilíneas son rectas.

Consideremos ahora cualquier función vectorial de punto $\mathbf{f}(u, v, w)$. Su derivada en la dirección $\mathbf{e}$ es

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial w}\frac{dw}{ds}.$$

Puesto que $d\mathbf{f}/ds = \mathbf{e} \cdot \nabla \mathbf{f}$, $du/ds = \mathbf{e} \cdot \nabla u$, tenemos

para todos los vectores $\mathbf{e}$. Por lo tanto (§38, Def.)

$$\nabla \mathbf{f} = \nabla u\, \mathbf{f}_u + \nabla v\, \mathbf{f}_v + \nabla w\, \mathbf{f}_w, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla u \cdot \mathbf{f}_u + \nabla v \cdot \mathbf{f}_v + \nabla w \cdot \mathbf{f}_w, \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \nabla u \times \mathbf{f}_u + \nabla v \times \mathbf{f}_v + \nabla w \times \mathbf{f}_w, \tag{6}$$

dan el gradiente, divergencia y rotación de una función vectorial de punto en coordenadas curvilíneas generales.

Cuando la posición del vector $\mathbf{r}$ se toma como una función de x, y, z, tenemos $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I}$ (40.8); pero, cuando $\mathbf{r}$ se toma como función de u, v, w, $\nabla \mathbf{r}$ está dado por (4). Por lo tanto

$$\mathbf{I} = \nabla u\, \mathbf{r}_u + \nabla v\, \mathbf{r}_v + \nabla w\, \mathbf{r}_w. \tag{7}$$

---

† Para los teoremas usados aquí, véase *Advanced Calculus*, §§87-89.

De esta ecuación podemos concluir que:

Las tríadas de vectores ∇u, ∇v, ∇w y $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_w$ forman conjuntos recíprocos. †

Demostración. Escribimos $\mathbf{e}_1 = \nabla u$, $\mathbf{e}_2 = \nabla v$, $\mathbf{e}_3 = \nabla w$, y hagamos que $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ denoten el conjunto recíproco. Entonces, multiplicando escalarmente (7) por $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ como prefactores, encontramos que $\mathbf{e}^1 = \mathbf{r}_u$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{r}_v$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{r}_w$.

Los vectores $\mathbf{r}_u$ son tangentes a las curvas-u, o sea las curvas a lo largo de las cuales v y w son constantes. Así, en cualquier punto $P(u, v, w)$, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_w$ son tangentes a las tres curvas coordenadas que concurren ahí. Más aún, de las propiedades de los conjuntos recíprocos:

$$(8) \qquad \nabla u = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w}{J}, \qquad \nabla v = \frac{\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u}{J}, \qquad \nabla w = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{J},$$

$$(9) \qquad \nabla u \times \nabla v \cdot \nabla w = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{J}.$$

Al calcular las invariantes de ∇f es usualmente más conveniente eliminar a ∇u, ∇v, ∇w de las fórmulas de arriba por medio de las ecuaciones (8). Así, de (5), obtenemos

$$(10) \qquad \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{J}\left(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w \cdot \mathbf{f}_u + \mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f}_v + \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f}_w\right),$$

o, en vista de la identidad,

$$(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)_u + (\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u)_v + (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)_w = \mathbf{0},$$

$$(11) \qquad J \operatorname{div} \mathbf{f} = (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w \cdot \mathbf{f})_u + (\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f})_v + (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f})_w.$$

En el importante caso en que todas las coordenadas se cortan en ángulos rectos, se dice que las curvas coordenadas son ortogonales; entonces

$$(12) \qquad \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_w = \mathbf{r}_w \cdot \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0.$$

Escogemos la notación de tal manera que

$$(13) \qquad \mathbf{r}_u = U\mathbf{a}, \qquad \mathbf{r}_v = V\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r}_w = W\mathbf{c},$$

donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son un conjunto dextrorso de vectores unitarios

---

† Les nueve ecuaciones $\nabla u \cdot \mathbf{r}_u = 1$, $\nabla u \cdot \mathbf{r}_v = 0, \cdots$ se deducen también de la regla ya mencionada: por ejemplo

$$u_x x_u + u_y y_u + u_z z_u = u_u = 1, \qquad u_x x_v + u_y y_v + u_z z_v = u_v = 0.$$

(variables) y U, V, W son todos positivos; entonces $J = UVW$. Ahora, (11) se convierte en

$$(14)\quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\mathbf{r}_w \cdot \mathbf{f}\right)\right]$$

Cuando reemplazamos a f por el gradiente de un escalar

$$(15)\quad \nabla g = \nabla u\, g_u + \nabla v\, g_v + \nabla w\, g_w, \qquad (37.12)$$

obtenemos la importante fórmula para el laplaciano de una función escalar en coordenadas ortogonales:

$$(16)\quad \nabla^2 g = \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}g_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}g_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}g_w\right)\right].$$

Cuando las coordenadas curvilíneas están dadas por las ecuaciones (1), podemos calcular U, V, W mediante las ecuaciones del tipo

$$(17)\quad U = |\mathbf{r}_u| = |x_u\mathbf{i} + y_u\mathbf{j} + z_u\mathbf{k}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}.$$

Ejemplo 1. Coordenadas cilíndricas. El punto $P(x, y, z)$ se proyecta en el punto $Q(x, y, 0)$ en el plano xy; si ρ, φ, son coordenadas polares de Q en el plano xy, $u = \rho$, $v = \varphi$, $w = z$ se llaman las coordenadas cilíndricas de P (Fig. 42*a*). Están relacionadas con las coordenadas rectangulares por medio de las ecuaciones

$$(18)\quad x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi,\ z = z$$

Las superficies de nivel $\rho = a$, $\varphi = b$, $z = c$ son cilindros alrededor del eje z, planos que pasan por el eje z y planos perpendiculares al eje z. Las curvas coordenadas, para ρ, son radios perpendiculares al eje z; para φ, círculos horizontales con centros en el eje z; y para z, rectas paralelas al eje z.

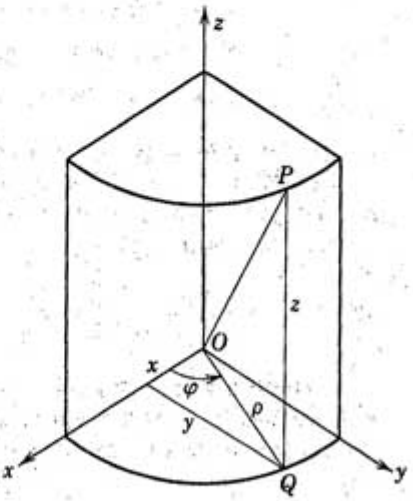


Fig. 42*a*. Coordenadas cilíndricas ρ, φ, z.

De $\mathbf{r} = [x, y, z]$, tenemos

$\mathbf{r}_\rho = [\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0]$, $U = 1$;
$\mathbf{r}_\varphi = [-\rho\operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi, 0]$, $V = \rho$;
$\mathbf{r}_z = [0, 0, 1]$, $W = 1$.

Puesto que estos vectores son mutuamente perpendiculares y $J = UVW = \rho > 0$, las coordenadas cilíndricas forman un sistema ortogonal que es dextrorso en el orden ρ, φ, z.

De (16), el laplaciano

$$\nabla^2 g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho g_\rho) + \frac{1}{\rho^2} g_{\varphi\varphi} + g_{zz}. \tag{19}$$

Cuando $g = \log \rho$, $\rho g_\rho = 1$; por lo tanto $\log \rho$ es una solución particular de la ecuación de Laplace $\nabla^2 g = 0$.

Ejemplo 2. Coordenadas esféricas. Las coordenadas esféricas de un punto $P(x, y, z)$ son su distancia $r = OP$ del origen, el ángulo θ entre OP y el eje z y el ángulo diedro φ entre el plano xz y el plano zOP (Fig. 42*b*). Están relacionadas con las coordenadas rectangulares por medio de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{20}$$

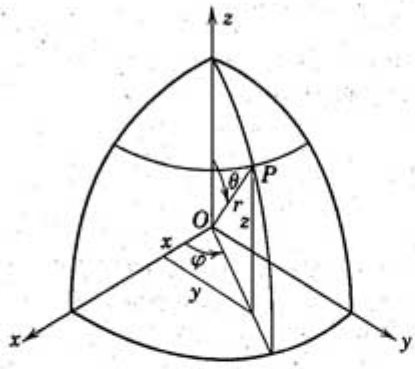


Fig. 42*b*. Coordenadas esféricas r, θ φ.

Las superficies de nivel $r = a$, $\theta = b$, $\varphi = c$, son esferas con centro en O, conos con respecto al eje z con vértices en O y planos que pasan por el eje z. Las curvas coordenadas, para r, son radios desde el origen; para θ, círculos verticales con centro en el origen; y, para φ, círculos horizontales con centros en el eje z.

De $\mathbf{r} = [x, y, z]$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r &= [\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta], & U &= 1; \\ \mathbf{r}_\theta &= [r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -r\operatorname{sen}\theta], & V &= r; \\ \mathbf{r}_\varphi &= [-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0], & W &= r\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Puesto que estos vectores son mutuamente perpendiculares y $J = UVW = r^2 \operatorname{sen}\theta > 0$, las coordenadas esféricas forman un sistema ortogonal que es dextrorso en el orden r, θ, φ.

De (16), el laplaciano

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, g_\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} g_{\varphi\varphi}\right]. \tag{21}$$

Cuando $g = 1/r$, $r^2 g_r = -1$; por lo tanto $1/r$ satisface a la ecuación de Laplace. La función más general de r que satisface la ecuación de Laplace es la solución general

$$g = \frac{A}{r} + B \quad \text{o} \quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg}{dr}\right) = 0.$$

PROBLEMAS

1. Con coordenadas cilíndricas ρ, φ, z, demostrar que

$$\nabla\rho = \mathbf{r}_\rho, \qquad \nabla\varphi = \mathbf{r}_\varphi\rho^2, \qquad \nabla z = \mathbf{r}_z.$$

2. Con coordenadas esféricas r, θ, φ, demostrar que

$$\nabla r = \mathbf{r}_r, \qquad \nabla\theta = \mathbf{r}_\theta/r^2, \qquad \nabla\varphi = \mathbf{r}_\varphi/r^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

3. Deducir el resultado del Prob. 41.6 de (21).

4. Demostrar que las ecuaciones

$$x = a_1u + a_2v + a_3w, \qquad y = b_1u + b_2v + b_3w, \qquad z = c_1u + c_2v + c_3w$$

representan un cambio de un conjunto de coordenadas rectangulares x, y, z en otro conjunto u, v, w cuando los vectores $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$ forman un conjunto autorecíproco.

[La identidad $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$ implica la autoreciprocidad de $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$, puesto que demuestra que $a_ia_j + b_ib_j + c_ic_j = \delta_{ij}$ y, por lo tanto $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$ son un conjunto de vectores unitarios ortogonales.]

5. Si u, v, w son coordenadas curvilíneas, demostrar que son válidas las identidades operacionales:

$$\nabla = \nabla u\frac{\partial}{\partial u} + \nabla v\frac{\partial}{\partial v} + \nabla w\frac{\partial}{\partial w};$$

$$\mathbf{r}_u \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial u}; \qquad (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \times \nabla = \mathbf{r}_v\frac{\partial}{\partial u} - \mathbf{r}_u\frac{\partial}{\partial v};$$

$$[\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\mathbf{r}_w]\,\nabla = \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w\frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u\frac{\partial}{\partial v} + \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\frac{\partial}{\partial w}.$$

6. Deducir la fórmula para rot f en coordenadas curvilíneas

(*a*) en forma análoga a (42.11):

$$J \operatorname{rot}\mathbf{f} = \{(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w) \times \mathbf{f}\}_u + \text{cycl};$$

(*b*) análogo a (40.7):

$$J \operatorname{rot}\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v & \mathbf{r}_w \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f} & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f} & \mathbf{r}_w \cdot \mathbf{f} \end{vmatrix}.$$

7. Si $\mathbf{f}(u, v)$ es una función definida sobre la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ y $\mathbf{e}$ es un vector unitario en el plano tangente al punto (u, v), demostrar que la derivada direccional de $\mathbf{f}(u, v)$ a lo largo de todas las curvas de la superficie tangentes a $\mathbf{e}$ está dada por

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{a}\,\mathbf{f}_u + \mathbf{b}\,\mathbf{f}_v)$$

donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ es el conjunto recíproco a $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{n}$.

[El vector unitario normal tiene la dirección de $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$; *Vector and Tensor Analysis*, §95.]

8. Sobre la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, el *gradiente de superficie*, la *divergencia* y el *rotacional* de una función $\mathbf{f}(u, v)$, se definen así:

$$\text{Grad}\,\mathbf{f} = \mathbf{a}\,\mathbf{f}_u + \mathbf{b}\,\mathbf{f}_v,$$
$$\text{Div}\,\mathbf{f} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{f}_u + \mathbf{b}\cdot\mathbf{f}_v,$$
$$\text{Rot}\,\mathbf{f} = \mathbf{a}\times\mathbf{f}_u + \mathbf{b}\times\mathbf{f}_v.$$

Demostrar que

$$\text{Div}\,\mathbf{r} = 2, \quad \text{Rot}\,\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \text{Rot}\,\mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

[*Análisis Vectorial y Tensorial* §96.]

Capítulo 5

Teoremas sobre Integrales

43. Integrales de línea. Sean las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ definidas sobre todos los puntos de una curva continua Γ, dada por las ecuaciones paramétricas

$$(1) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2).$$

Entonces, la integral de línea sobre Γ,

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

se calcula como la integral de Riemann entre $t = t_1$ y $t = t_2$ substituyendo las ecuaciones (1) en el integrando. Si P, Q, R se convierten en $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, la integral anterior se convierte en

$$(2) \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{t_1}^{t_2} [P(t)\,x'(t) + Q(t)\,y'(t) + R(t)\,z'(t)]\,dt.$$

Si las funciones $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ son integrables y la curva Γ es continua (§26), la integral existe con seguridad. Si Γ es continua en algunas partes solamente, (2) es válido sobre cada arco continuo y en consecuencia, por adición, sobre toda la curva. Las discontinuidades finitas de $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ no hacen dudar de la existencia de la integral. Así, Γ puede ser una línea quebrada, por ejemplo una recta escalonada como los dos lados adyacentes de un rectángulo. Más, aún, Γ puede ser una curva cerrada o polígono que no se cruce consigo mismo; en este caso

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

es la integral del circuito con respecto a Γ en el sentido positivo. Para una curva plana que encierre una región $\mathcal{R}$, el sentido positivo es el que recorre la región hacia la izquierda. Así,

el sentido positivo en una curva simple cerrada es el contrario al de las manecillas del reloj.

Si tomamos a P, Q, R como las componentes de una función vectorial de punto,

$$\mathbf{f} = [P, Q, R],$$

y escribimos la ecuación de la curva en forma vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\, x(t) + \mathbf{j}\, y(t) + \mathbf{k}\, z(t) = \mathbf{r}(t), \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2),$$

la integral (2) asume la forma compacta

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt, \tag{3}$$

que se aplica igualmente bien a dos o a tres dimensiones.

El valor de una integral de línea es independiente de la representación paramétrica de la curva. Esto se deduce del teorema general de cambio de variable en integrales. † Con el arco s a lo largo de la curva como parámetro, $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$ (28.4), y la integral de línea se convierte en

$$\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, ds, \tag{4}$$

que es la integral de la componente tangencial de $\mathbf{f}$ a lo largo de la curva. Si $\mathbf{f}$ es normal a Γ dondequiera, la integral de línea es nula.

Ejemplo 1. Calcular $I = \int x\, dy - y\, dx$ desde (0, 0) hasta (1, 1)

(i) la recta $y = x$;
(ii) la trayectoria escalonada
(iii) la trayectoria escalonada
(iv) la parábola $y = x^2$;
(v) el círculo $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$ $(-\frac{1}{2}\pi \leqq t \leqq 0)$.
(vi) Intégrese también alrededor del cuadrado (0, 0) — (1, 0) — — (1, 1) — (0, 1) = (0, 0).

Soluciones:

(i) $I = \int_0^1 (x - x)\, dx = 0;$

(ii) $I = 0 + \int_0^1 dy = 1;$

† *Advanced Calculus*, §123.

(iii) $I = 0 - \int_0^1 dx = -1;$

(iv) $I = \int_0^1 (2x^3 - x^2)\, dx = \frac{1}{3};$

(v) $I = \int_{-\pi/2}^0 [\cos^2 t + (1 + \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t]\, dt = \frac{\pi}{2} - 1.$

(vi) $I = 0 + \int_0^1 dy - \int_1^0 dx + 0 = 2.$

Ejemplo 2. La integral de línea sobre una curva Γ en el Ejemplo 1 tiene una interpretación simple. Si cambiamos a coordenadas polares,

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\operatorname{sen}\varphi$$

$$dx = -r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, dr, \qquad dy = r\cos\varphi\, d\varphi + \operatorname{sen}\varphi\, dr,$$

encontramos que

$$I = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} x\, dy - y\, dx = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi = 2A$$

donde $\tan\varphi_1 = y_1/x_1$, $\tan\varphi_2 = y_2/x_2$ y A es el área del sector OP_1P_2 subtendido por Γ en el origen (Fig. 43). Podemos ahora expresar a A como una integral de circuito

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\oint x\, dy - y\, dx \tag{5}$$

tomada sobre todo el borde del sector; puesto que las rectas radiales $\varphi = \varphi_1$ y $\varphi = \varphi_2$ no contribuyenen nada. El área A es positiva o negativa de acuerdo con que el circuito sea en sentido contrario al de las manecillas del reloj o en ese sentido. Todos los resultados del Ejemplo 1 pueden ahora comprobarse fácilmente.

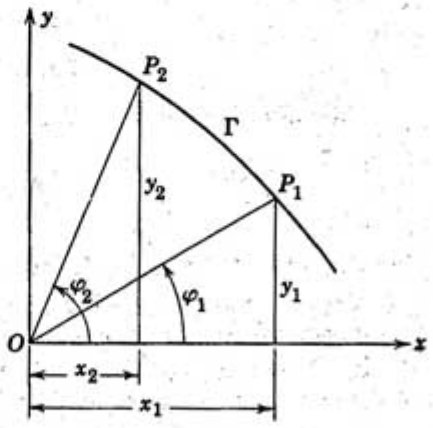


Fig. 43. Área de un sector.

Ejemplo 3. Calcular $\oint y^2dx - x^2dy$ alrededor del triángulo cuyos vértices son (1, 0), (0, 1), (− 1, 0).

Comenzando el circuito en (1, 0), los lados del triángulo son segmentos de las rectas

$$x + y = 1,\ y - x = 1,\ y = 0;$$

y, por lo tanto la integral de circuito es igual a

$$\int_1^0 [(1 - x)^2 + x^2]\, dx + \int_0^{-1} [(1 + x)^2 - x^2]\, dx = -\frac{2}{3}.$$

Ejemplo 4. Calcular $\oint (y^2\,dx - x^2\,dy)$ alrededor del círculo $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$.

La integral, tomada en sentido contrario al de las manecillas del reloj es igual a

$$-\int_0^{2\pi} [(1 + \operatorname{sen} t)^2 \operatorname{sen} t + \cos^3 t]\,dt = -2\pi.$$

Ejemplo 5. Calcular la integral de línea

$$I = \int y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

(*a*) sobre la línea quebrada (0, 0, 0) — (1, 0, 0) — (1, 1, 0) — (1, 1, 1);

(*b*) sobre la línea quebrada (0, 0, 0) — (0, 1, 0) — (1, 1, 0) — (1, 1, 1);

(*c*) sobre la recta $x = y = z = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$;

(*d*) sobre la cúbica alabeada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \leqq t \leqq 1)$.

Soluciones:

(*a*) $I = 0 + 0 + \int_0^1 dz = 1$;

(*b*) $I = 0 + \int_0^1 dx + \int_0^1 dz = 2$;

(*c*) $I = \int_0^1 3t\,dt = \frac{3}{2}$;

(*d*) $I = \int_0^1 (t^2 + 2t^4 + 3t^2)dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{89}{60}$.

PROBLEMAS

1. Calcular la integral de línea

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y)\,dx + (2x + y)\,dy,$$

sobre las cinco trayectorias dadas en el Ej. 43.1

2. Calcular la integral de circuito del Ej. 43.3 sobre

(*a*) el círculo $x = x_0 + r\cos t$, $y = y_0 + r\operatorname{sen} t$;

(*b*) la elipse $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$;

(*c*) el cuadrado incluído por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

3. Calcular $\oint \left(\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x}\right)$ sobre el triángulo incluido por las rectas $y = 1$, $x = 4$, $y = x$.

4. Calcular la integral de línea $\int_{(1,0)}^{(2,1)} \frac{1 + y^2}{x^2}\,dx - \frac{1 + x^2}{x^2}\,y\,dy$

(*a*) sobre la trayectoria escalonada (1, 0) — (2, 0) — (2, 1);
(*b*) sobre la trayectoria escalonada (1, 0) — (1, 1) — (2, 1);
(*c*) sobre la recta $y = x - 1$.

5. Calcular la integral de línea

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} x^2y\,dx + y^3\,dy$$

(*a*) sobre la trayectora escalonada (1, 0) — (3, 2) — (3, 4);
(*b*) sobre la trayectoria escalonada (1, 2) — (1, 4) — (3, 4);
(*c*) sobre la recta $x - y + 1 = 0$.

6. Calcular $\int y\,dx - x\,dy + dz$ sobre una espira de la hélice $x = 2\cos t,\ y = 2\operatorname{sen} t,\ z = 3t$.

44. Integrales de línea independientes de la trayectoria. Nos preguntamos ahora en qué circunstancias la integral

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt,$$

tomada entre los puntos P_1 y P_2, es independiente de la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ que une a esos puntos. Consideraremos solamente curvas regulares orientadas, es decir, curvas que sean continuas, sin puntos dobles † y dirigidas de P_1 a P_2.

Notamos que, si $\int \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en una región $\mathcal{R}$, entonces $\oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las curvas cerradas en esa región. Puesto que, si $P_1AP_2BP_1$ es una curva cerrada,

$$\oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r};$$

por lo tanto, si $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, $\oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = 0$. Inversamente, si $\oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = 0$ sobre todas las curvas cerradas de $\mathcal{R}$, $\int f\cdot d\mathbf{r}$ es la misma sobre dos trayectorias cualesquiera de P_1 a P_2 que no se crucen. Pero, aún si las dos curvas se cruzan, las integrales de línea correspondientes son

† Los puntos en que una curva se cruza consigo misma o es tangente consigo misma, se llaman puntos dobles.

iguales, puesto que ambas son iguales a la integral sobre una tercera curva de P_1 a P_2 que no corte a ninguna †

TEOREMA 1. *Si la función vectorial continua* $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ *es el gradiente* ∇F *de una función escalar de punto uniforme en una región* $\mathscr{R}$, *la integral de línea* $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ *tiene el mismo valor sobre todas las curvas regulares en* $\mathscr{R}$ *dirigidas de* P_1 *a* P_2; *y*

$$(1) \qquad \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \nabla F = F(\mathbf{r}_2) - F(\mathbf{r}_1).$$

Demostración. Sea $\mathbf{f} = [P, Q, R] = \nabla F$; entonces

$$\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

En consecuencia

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt = F(x, y, z)\Big|_{t_1}^{t_2} = F(\mathbf{r}_2) - F(\mathbf{r}_1).$$

Ejemplo 1. Puesto que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \nabla r^2 = 2[x, y, z] = 2\mathbf{r},$$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} r_2^2 - \frac{1}{2} r_1^2.$$

Demostraremos ahora la inversa del Teorema 1.

TEOREMA 2. *Si* $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = [P, Q, R]$ *es una función vectorial continua en una región* $\mathscr{R}$ *en la que* $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ *tenga el mismo valor sobre todas las curvas regulares dirigidas entre los mismos puntos extremos, entonces en* $\mathscr{R}$, $\mathbf{f}$ *es el gradiente de la función*

$$(2) \qquad F(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

---

† Para regiones planas, este argumento es falso, puesto que una tercera curva que no corte a ninguna de las dos, puede no existir. Si las curvas no se cruzan sino un número finito de veces, la demostración se sigue considerando cada lazo separadamente. Pero para un número infinto de cruzamientos, la demostración es más difícil.

Demostración. Con un límite inferior fijo, la integral (2) es una función $F(x, y, z)$ del límite superior (x, y, z), puesto que la trayectoria de integración no tiene importancia. Ahora, si calculamos $F(x + h, y, z)$ sobre una curva desde (x_0, y_0, z_0) a (x, y, z) y luego a $(x + h, y, z)$ sobre un segmento recto, tenemos

$$\begin{aligned} F(x + h, y, z) - F(x, y, z) &= \int_{(x,y,z)}^{(x+h,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_{x}^{x+h} P(t, y, z)\,dt \\ &= h\,P(\xi, y, z), \qquad x < \xi < x + h, \end{aligned}$$

por el teorema del valor medio para integrales. † En consecuencia

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{h\,P(\xi, y, z)}{h} = \lim_{\xi \to x} P(\xi, y, z) = P(x, y, z)$$

puesto que $P(x, y, z)$ es continua. De una manera similar demostramos que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z), \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = R(x, y, z),$$

y, por lo tanto $\mathbf{f} = [P, Q, R] = [\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z] = \nabla F.$

En resumen, estos teoremas establecen que la integral de línea $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria cuando y sólo cuando $\mathbf{f} = \nabla F$, un vector gradiente, o lo que es lo mismo, $\mathbf{f} : d\mathbf{r} = dF$, una diferencial perfecta. A fin de usar esta prueba, debemos aprender a *reconocer* un vector gradiente. Esto será nuestro próximo objetivo.

Ejemplo 2. Si calculamos la integral de línea

$$I = \int_{(1,2)}^{(3,4)} (x + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

sobre dos trayectorias escalonadas de (1, 2) a (3, 4) y también sobre la recta que une a estos dos puntos, encontraremos en cada caso que

† *Advanced Calculus*, §121.

$I = 48$. Esto nos sugiere que I es independiente de la trayectoria. Para verificar esto, observamos que

$$x\,dx + y^2\,dx + x(2y\,dy) = d(\tfrac{1}{2}x^2 + xy^2);$$

en consecuencia, si $F = \frac{1}{2}x^2 + xy^2$,

$$[x + y^2, 2xy] = [F_x, F_y] = \nabla F,$$

y

$$I = F(3, 4) - F(1, 2) = 52\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2} = 48.$$

Ejemplo 3. Si $\mathbf{f} = -\mathbf{r}/r^3$,

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla r = \nabla\frac{1}{r}.$$

Por lo tanto, sobre cualquier trayectoria de P_1 a P_2 que no pase por el origen,

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}.$$

45. Vectores irrotacionales. Una función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ se llama irrotacional en una región si rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ en dicha región. Hemos visto en §40 que, si la función escalar $\varphi(\mathbf{r})$ tiene segundas derivadas parciales continuas en una región, su gradiente $\nabla\varphi$ es irrotacional:

$$\text{(1)} \qquad \text{rot}\,\nabla\varphi = \mathbf{0} \qquad (40.10)$$

Esto hace surgir la pregunta: ¿Puede todo vector $\mathbf{f}$ que sea irrotacional en una región ser expresado como un vector gradiente? La respuesta es sí, siempre y cuando la región sea simplemente conexa, en el sentido de la siguiente

DEFINICIÓN. Una curva cerrada se llama *reducible* en una región si puede ser encogida de una manera continua hasta convertirse en un punto. Una región en la cual todas las curvas cerradas regulares sean reducibles se llama *simplemente conexa.*

Así, una región plana limitada por una curva cerrada regular es simplemente conexa, pero la región entre dos círculos concéntricos no lo es. En tres dimensiones, la región dentro de una esfera o un prisma rectangular es simplemente conexa. Lo mismo se puede decir de la región entre dos esferas concéntricas. Pero la región dentro de un toro no es simplemente conexa, puesto que todas las curvas cerradas que rodean a su eje son irreducibles.

Si $\mathbf{f} = [P, Q, R]$,

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}; \tag{2}$$

en consecuencia, rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ implica que

$$R_y = Q_z, \qquad P_z = R_x, \qquad Q_x = P_y. \tag{3}$$

Cuando $R = 0$, $\mathbf{f}$ es un vector plano y rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ implica que $Q_x = P_y$.

Consideremos primero el caso plano, para una región rectangular simple.

TEOREMA 1. *Si el vector plano* $\mathbf{f} = [P, Q, 0]$ *tiene primeras derivadas parciales continuas dentro de un rectángulo y*

$$\text{rot } \mathbf{f} = [0, 0, Q_x - P_y] = \mathbf{0},$$

entonces $\mathbf{f} = \nabla F$, *es un vector gradiente.*

Demostración. Defínase $F(x, y)$ mediante la integral de línea

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

tomada sobre la trayectoria escalonada $(x_0, y_0) - (x, y_0) - (x, y)$:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt.$$

Ahora, por las reglas para derivar una integral, † tenemos

$$F_y = Q(x, y), \qquad F_x = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} Q_x(x, t)\, dt.$$

Por hipótesis, $Q_x(x, t) = P_t(x, t)$; por lo tanto

$$F_x = P(x, y_0) + P(x, t)\Big|_{t=y_0}^{t=y} = P(x, y).$$

Tenemos, entonces

$$\mathbf{f} = [P, Q] = [F_x, F_y] = \nabla F.$$

El teorema 44.1 muestra ahora que $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, por lo tanto

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\, dx + Q\, dy \tag{4}$$

† *Advanced Calculus*, §119, §133.

sobre cualquier trayectoria en el rectángulo que va desde (x_0, y_0) a (x, y).

Por ejemplo, la trayectoria escalonada $(x_0, y_0) - (x_0, y) - (x, y)$ da

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy \tag{5}$$

donde las integrales se escriben en orden inverso.

En tres dimensiones, tenemos el correspondiente

TEOREMA 2. *Si el vector* $\mathbf{f} = [P, Q, R]$ *tiene primeras derivadas parciales continuas en un prisma rectangular y*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = [R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y] = \mathbf{0},$$

entonces, $\mathbf{f} = \nabla F$, es un vector gradiente.

Demostración. Definimos $F(x, y, z)$ mediante la integral de línea

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

tomada sobre la trayectoria escalonada $(x_0, y_0, z_0) - (x, y_0, z_0) - (x, y, z_0) - (x, y, z)$. Entonces

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\, dt,$$

y encontramos $F_z = R(x, y, z)$, $F_y = Q(x. y, z)$, como antes. Más aún,

$$\begin{aligned} F_x &= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} Q_x(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R_x(x, y, t)\, dt \\ &= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} P_t(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} P_t(x, y, t)\, dt \\ &= P(x, y_0, z_0) + P(x, t\ z_0)\Big|_{t=y_0}^{t=y} + P(x,y,t)\Big|_{t=z_0}^{t=z} \\ &= P(x, y, z). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{f} = [P, Q, R] = \nabla F$; $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria y

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\, dx + Q\, dy + R\, dz \tag{6}$$

sobre *cualquier* trayectoria en el prisma rectangular desde (x_0, y_0, z_0) a (x, y, z).

Por ejemplo, la trayectoria escalonada $(x_0, y_0, z_0) - (x_0, y_0, z) - (x_0, y\ z) - (x, y, z)$ nos da

$$(7)\quad F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\, dz,$$

donde las integrales se escriben en orden inverso.

Las fórmulas (5) y (7) se pueden recordar fácilmente. Ambas dan una función F que se anula en $\mathbf{r}_0$. El cambio de punto inicial $\mathbf{r}_0$ solamente altera a F por una constante. En la práctica, $\mathbf{r}_0$ se escoge de tal manera que las integrales se simplifiquen lo más posible. Si la región en la que rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ incluye el origen, este punto es generalmente una buena elección.

En la física matemática es costumbre expresar un vector irrotacional $\mathbf{f}$ como el *negativo* de un gradiente. Así, si rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ en una región simplemente conexa,

$$(8)\qquad \mathbf{f} = -\nabla\varphi,$$

y a φ se le llama el potencial (*escalar*) de $\mathbf{f}$.

Ejemplo 1. Cuando

$$\mathbf{f} = [2x^2 + 6xy,\ 3x^2 - y^2,\ 0] \qquad \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Integrando sobre la trayectoria escalonada $(0, 0) - (x, 0) - (x, y)$, obtenemos

$$F(x, y) = \int_0^x 2x^2\, dx + \int_0^y (3x^2 - y^2)\, dy = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2y - \frac{1}{3}y^3,$$

y, sobre $(0, 0) - (0, y) - (x, y)$,

$$F(x, y) = \int_0^x (2x^2 + 6xy)\, dx - \int_0^y y^2\, dy = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2y - \frac{1}{3}y^3,$$

donde las integrales se escriben en orden inverso.

Podemos ahora calcular la integral de línea entre dos puntos cualesquiera:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1).$$

Ejemplo 2. Cuando

$$\mathbf{f} = [2xz,\ 2yz^2,\ x^2 + 2y^2z - 1], \qquad \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Integrando sobre la trayectoria escalonada $(0, 0, 0) - (x, 0, 0) - (x, y, 0) - (x, y, z)$, obtenemos

$$F(x, y, z) = 0 + 0 + \int_0^z (x^2 + 2y^2z - 1)\, dz = x^2z + y^2z^2 - z;$$

y, sobre la trayectoria escalonada $(0, 0, 0) - (0, 0, z) - (0, y, z) - (x, y, z)$,

$$F(x, y, z) = \int_0^x 2xz\,dx + \int_0^y 2yz^2\,dy - \int_0^z dz = x^2z + y^2z^2 - z,$$

donde las integrales están escritas en orden inverso

Aunque las trayectorias escalonadas dan generalmente la manera más fácil de calcular $F(x, y, z)$, un segmento recto que una (x_0, y_0, z_0) con (x, y, z) es a veces preferible. Si $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es continua para $\mathbf{r} = 0$, podemos integrar a lo largo de la recta radial de 0 a r. Los puntos de esta recta tienen vectores de posición $t\mathbf{r}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, y por lo tanto

$$F(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{f}(t\mathbf{r}) \cdot d(t\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \int_0^1 \mathbf{f}(t\mathbf{r})\,dt. \tag{9}$$

En particular, cuando $\mathbf{f} = [P, Q, R]$ es homogénea de grado n, $\mathbf{f}(t\mathbf{r}) = t^n\mathbf{f}(\mathbf{r})$ y (9) se convierte en

$$F(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})}{n+1} = \frac{xP + yQ + zR}{n+1}, \qquad n > -1. \tag{10}$$

Si $n < -1$, podemos integrar desde $t = \infty$ a $t = 1$ y obtener de nuevo (10).

Ejemplo 3. En el Ejemplo 1, f es homogénea de grado 2, luego de (10)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \tfrac{1}{3}[x(2x^2 + 6xy) + y(3x^2 - y^2)] \\ &= \tfrac{2}{3}x^3 + 3x^2y - \tfrac{1}{3}y^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 4. En el Ejemplo 2, f no es homogéneo, pero podemos aplicar (9). Así,

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= [x, y, z] \cdot \int_0^1 [2xzt^2, 2yz^2t^3, x^2t^2 + 2y^2zt^3 - 1]\,dt \\ &= [x, y, z] \cdot [\tfrac{2}{3}xz, \tfrac{1}{2}yz^2, \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2z - 1] \\ &= x^2z + y^2z^2 - z. \end{aligned}$$

Ejemplo 5. El vector $\mathbf{f} = r^{n-1}\mathbf{r}$ es un vector gradiente, puesto que $\mathbf{r}/r = \nabla r$ (37.15), y

$$\mathbf{f} = r^n \nabla r = \begin{cases} \nabla \dfrac{r^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1, \\ \nabla \log r, & n = -1. \end{cases}$$

La función F puede también encontrarse de (10) si $n \neq -1$.

46. Regiones simplemente conexas. Cuando rot $\mathbf{f} = 0$ en una región rectangular, podemos construir una función $F(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ integrando sobre una trayectoria escalonada desde P_0 hasta un punto P arbitrario de la región. Esta construcción no puede usarse en general para todas las regiones simplemente conexas, puesto que, empezando de P_0, puede suceder que no alcancemos a P con una trayectoria escalonada que permanezca dentro de la región. Para vencer esta dificultad es preciso un argumento bastante detallado que solamente apuntaremos brevemente. †

Consideremos un polígono variable $\Gamma(t)$ en la región, cuyos vértices estén dados por sus vectores de posición $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t), \cdots \mathbf{r}_k(t)$, que son funciones continuas del tiempo t, tales que $\Gamma(t)$ se reduzca a un punto a medida que t varíe de 0 a 1. Puede demostrarse que la integral de circuito

$$I(t) = \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \text{const} \tag{1}$$

mientras que $\Gamma(t)$ se reduce a un punto, la constante debe ser cero. Puesto que el polígono original dado por $\mathbf{r}_1(0)$, $\mathbf{r}_2(0)$, $\cdots$, $\mathbf{r}_k(0)$ es arbitrario, esto quiere decir que $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sobre cualquier polígono cerrado en esa región. Por lo tanto $\oint_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es la misma para todas las trayectorias poligonales entre $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ y define una función $F(\mathbf{r})$. Podemos ahora demostrar de la misma manera que en § 45, que $\mathbf{f} = \nabla F$ y que la integral de línea tiene el mismo valor sobre todas las curvas regulares entre los mismos extremos.

Así, la demostración depende de (1). Para establecer este resultado, consideremos dos polígonos $\Gamma(t)$ y $\Gamma(t')$, donde $0 \leqq t < t' \leqq 1$. Escojamos n puntos A_1, A_2, $\cdots$, A_n sobre $\Gamma(t)$, de tal manera que cada pareja A_iA_{i+1} esté dentro de un rectángulo R (o prisma rectangular) dentro de nuestra región. A medida que $t \to t'$, hagamos que $A_i \to B_i$ en $\Gamma(t')$ (Fig. 46*a*). Escojamos ahora $t' - t$ tan pequeño que B_iB_{i+1} esté también en R_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Cuando rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, la integral

† Cf. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Blackie, vol. 2, p. 357.

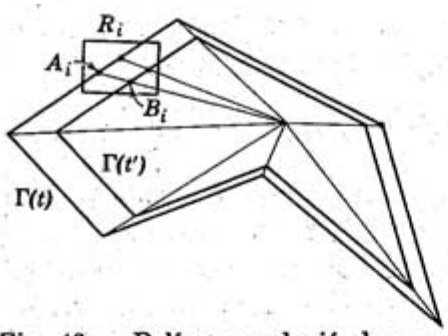


Fig. 46*a*. Polígono reduciéndose a un punto.

de circuito sobre el cuadrángulo $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_iA_i$ es nula por el teorema 1 o 2 de §45; y, si sumamos todas las integrales de circuito, tenemos

$$I(t) - I(t') = 0.$$

Así, está establecido (1).

Nuestro resultado final se establece en el

TEOREMA. *Si la función vectorial* $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ *tiene primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa, la integral de línea* $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ *tomada sobre cualquier curva dentro de la región, será independiente de la trayectoria cuando y sólo cuando* $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Demostración. Acabamos de demostrar que en una región simplemente conexa $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ implica que $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. Inversamente, si $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, $\mathbf{f}$ es un vector gradiente (teorema 44.2) y, por lo tanto $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{f}$ satisface las condiciones del teorema en una región simplemente conexa V, excepto en una superficie S donde $\mathbf{f}$ tenga discontinuidades finitas, tenemos aún que $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las curvas cerradas en V si *la componente tangencial de* $\mathbf{f}$ *es continua en* S.

Demostración. Hagamos que S divida a V en dos partes, V_1, V_2. Sea $PAQB$ una curva cerrada que corte a S en A y en B (Fig. 46*b*). Entonces si AB es una curva regular en S,

$$\oint_{ABPA} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{BPA} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

$$\oint_{BAQB} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{BA} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{AQB} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

y, además,

$$\int_{AB} (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{BPAQB} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Por lo tanto, $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las trayectorias en V cuando y sólo cuando la integral de línea

$$\int (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$$

para *todas* las trayectorias en S. Esto requiere que $\mathbf{f}_1 : \mathbf{T} = \mathbf{f}_2 : \mathbf{T}$ en todos los puntos de S; esto es, que $\mathbf{f} : \mathbf{T}$ sea continua en S.

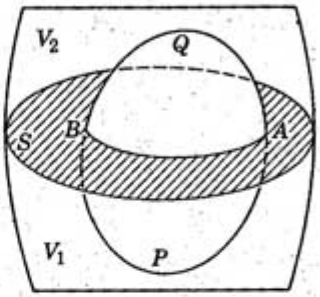


Fig. 46*b*. Superficie de discontinuidad.

Ejemplo. La función vectorial

$$\mathbf{f} = [P, Q] = \left[-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$$

es continua en todos los puntos, excepto en (0, 0). En la región R, consistente en todo el plano, excepto un pequeño círculo alrededor del origen, $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_x$, $\mathbf{f}_y$ son continuas. Más aún,

$$Q_x = P_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{y} \quad \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{in } R.$$

Así, $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ con respecto a cualquier curva de R que no envuelva al origen, ya que tal curva puede ser comprendida en una subregión simplemente conexa de R. Pero, para cualquier curva que pase cerca del origen,

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \oint \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

haciendo $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$; tal curva no puede ser comprendida en una subregión simplemente conexa de R. Así, en la región doblemente conexa R, $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria aun cuando rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ en cualquier lugar de R.

PROBLEMAS

1. Expresar

$$\mathbf{f} = [2x^2 + 6xy, 3x^2 - y^2, 0]$$

como ∇F y calcular $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$.

2. Si la integral

$$\int_{(0,1)}^{(x,y)} \left(\frac{2x}{y} - 3\right) dx + \left(4 - \frac{x^2}{y^2}\right) dy$$

define una función $F(x, y)$ cuando $y > 0$, encontrar aquélla.

3. Expresar

$$\mathbf{f} = [2xyz^3,\ x^2z^3,\ 3x^2yz^2]$$

como ∇F y calcular $\displaystyle\int_{(1,2,-1)}^{(2,3,1)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$.

4. Calcular

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$$

sobre cualquier trayectoria que no envuelva el origen. Cuando (x, y) es (a, b), encontrar el valor de la integral de circuito. ¿Es su respuesta correcta en caso de que el circuito envuelva al origen?

5. Si el vector

$$\mathbf{f} = \begin{cases} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, & z \geqq 0, \\ x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}, & z < 0, \end{cases}$$

demostrar que $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ en cualquier curva cerrada.

Calcular $\displaystyle\int_{(1,2,-3)}^{(2,3,4)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$.

6. Demostrar que el vector

$$\mathbf{f} = \begin{cases} \mathbf{r}, & r \leqq a, \\ -a^3 \nabla \dfrac{1}{r}, & r > a, \end{cases}$$

es continuo e irrotacional en el espacio. Encontrar una función *continua* $F(r)$ tal que $\mathbf{f} = \nabla F$.

Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ sobre cualquier trayectoria.

47. Teorema de Green en el plano. Sea $\mathcal{R}$ una región cerrada que esté limitada por una o más curvas cerradas. Entonces, el *sentido positivo* sobre el límite es aquel que deja a $\mathcal{R}$

a la izquierda. Así, para la región dentro de una curva cerrada C (Fig. 47a), el sentido positivo sobre C es contrario al de las manecillas del reloj, pero para la región interior a C_1, exterior a C_2 y a C_3 (Fig. 47c), el sentido positivo es contrario al de las manecillas del reloj para el límite exterior y en ese sentido para el límite interior.

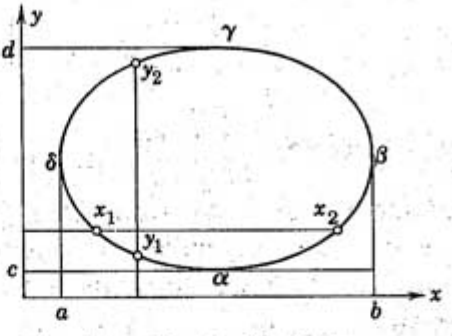


Fig. 47a. Región limitada por una curva cerrada simple.

TEOREMA DE GREEN. *Sea $\mathcal{R}$ una región cerrada limitada por una o más curvas regulares cerradas* † *y capaz de ser dividida en subregiones cuyos límites se puedan cortar a lo más en dos puntos por rectas paralelas a los ejes. Entonces, si $P(x, y)$, $Q(x, y)$, P_y, Q_x son continuas en $\mathcal{R}$,*

$$(1) \qquad \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint P\, dx + Q\, dy,$$

en la que la integral de circuito se toma sobre el límite de $\mathcal{R}$ en el sentido positivo.

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{R}$ está limitada por una curva cerrada C que es cortada a lo más en dos puntos por cualquier recta paralela a los ejes (Fig. 47a).

Calculemos primero la integral doble $\iint Q_x dx\, dy$ como una integral repetida, ‡ integrando primero con respecto a x entre las curvas $x = x_1(y)$ y $x = x_2(y)$ y después con respecto a y entre las paralelas $y = c$ e $y = d$, que limitan la curva por arriba y por abajo:

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx$$

$$= \int_c^d [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]\, dy$$

$$= \int_c^d Q(x_2, y)\, dy + \int_d^c Q(x_1, y)\, dy,$$

† Se dice una *curva regular* aquella que no presenta puntos singulares ni dobles.

‡ *Advanced Calculus*, §159.

en la que las integrales se toman sobre los arcos $\alpha\beta\gamma$ y $\gamma\delta\alpha$, respectivamente; por lo que

$$\text{(2)} \qquad \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_C Q(x, y)\, dy.$$

Calculemos $\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$ como integral repetida, integrando primero con respecto a y entre las curvas $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ y después con respecto a x entre las paralelas $x = a$ e $y = b$, que limitan la curva a la izquierda y a la derecha:

$$\begin{aligned}\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \\ &= \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\, dx \\ &= -\int_a^b P(x, y_1)\, dx - \int_b^a P(x, y_2)\, dx,\end{aligned}$$

en la que las integrales se toman sobre los arcos $\delta\alpha\beta$ y $\beta\gamma\delta$, respectivamente; por lo que

$$\text{(3)} \qquad -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_C P(x, y)\, dx.$$

Sumando (2) y (3) obtenemos (1).

Podemos ahora extender la ecuación (3) a regiones que puedan ser divididas en un número finito de subregiones que tengan la propiedad requerida por el teorema. Para cada subregión, la ecuación (3) es válida, y cuando estas ecuaciones se suman, las integrales dobles se combinan en una integral para toda la región; pero las integrales de línea sobre los límites internos se cancelan, puesto que cada una se recorre dos veces en dirección opuesta, dejando sólo la integral de circuito sobre el límite exterior (Fig. 47*b*).

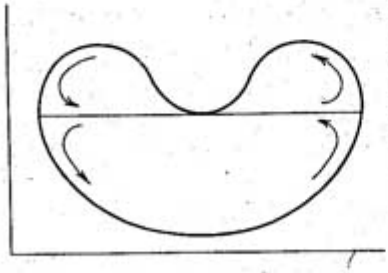


Fig. 47*b*. Región disectada.

Una región $\mathcal{R}$ acotada por una curva cerrada es *simplemente conexa* (§46); puesto que cualquier curva cerrada en $\mathcal{R}$ puede ser contraída continuamente hasta convertirse en un punto dentro de la región. Pero si el límite de $\mathcal{R}$ consta de dos

o más curvas cerradas (Fig. 47c), es *múltiplemente conexa*, puesto que una curva cerrada con respecto a C_2 o C_3 no puede contraerse a un punto sin cruzar C_2 o C_3. Pero la región $\mathscr{R}'$ de la Fig. 47c puede hacerse simplemente conexa mediante dos cortes, aa' y bb', que unan C_1 a C_2 y C_3, y, si pasamos alrededor del nuevo límite como indican las flechas (atravesando cada corte dos veces), se puede hacer todo el circuito en sentido positivo.

Podemos ahora aplicar el teorema de Green (1) a la región de la Fig. 47c que se ha hecho simplemente conexa mediante cortes. En el miembro izquierdo, la integral doble cubre la región interior a C_1 y exterior a C_2 y C_3. En el miembro derecho, la integral de línea comprende los circuitos en el sentido positivo sobre C_1, C_2 y C_3, puesto que las integrales sobre los cortes se cancelan al ser éstos recorridos dos veces en sentidos opuestos.

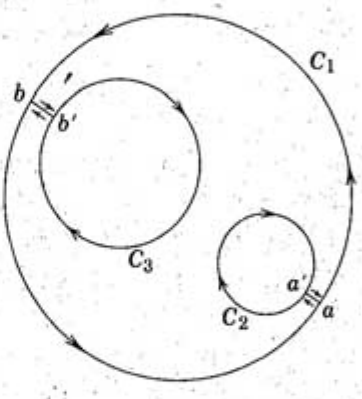


Fig. 47c. Región múltiplemente conexa hecha simplemente conexa mediante cortes transversales.

Un límite interno de una región puede consistir en un simple punto P_0 que debe excluírse de $\mathscr{R}$ para lograr los requisitos de continuidad del teorema de Green. Una región puntiforme de este tipo es múltiplemente conexa, puesto que una curva alrededor de P_0 no puede ser contraída a un punto dentro de la región sin cruzar por P_0. Si la región es todo el plano reducido a un punto en P_0, un corte desde P_0 hasta el infinito la hará simplemente conexa, puesto que todas las curvas cerradas que no pasen por ese corte pueden ser contraídas a un punto.

Puede demostrarse por un argumento más complicado que el *teorema de Green es válido para cualquier región limitada por curvas que sean continuas solamente en tramos*. Esto no se deduce del argumento ya dado, puesto que éste es solamente válido para regiones que puedan ser divididas en subregiones que sean cortadas a lo más en dos puntos por rectas paralelas a los ejes. Así, una región limitada en parte por la curva $y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ (que es continua cuando $x > 0$), es cortada por el eje x en un número infinito de puntos y no podría divi-

dirse como antes se pide. Sin embargo, el teorema de Green es válido aún en tales casos. La demostración depende de un proceso de límite.

El teorema de Green es también válido cuando $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ se reemplazan por funciones vectoriales

$$\mathbf{P}(x,y) = \mathbf{i}\,P_1(x,y) + \mathbf{j}\,P_2(x,y) + \mathbf{k}\,P_3(x,y),$$
$$\mathbf{Q}(x,y) = \mathbf{i}\,Q_1(x,y) + \mathbf{j}\,Q_2(x,y) + \mathbf{k}\,Q_3(x,y),$$

cuyas componentes $P_i(x, y)$, $Q_i(x, y)$ satisfagan los requisitos pedidos. Para demostrar esto solamente necesitamos aplicar el teorema a las tres parejas de funciones $P_i(x, y)$, $Q_i(x, y)$, multiplicar las ecuaciones por **i**, **j**, **k** respectivamente y sumarlas.

Notamos, por último, que el teorema de Green es válido cuando P y Q son diádicas. La integral de diádicas no requiere una nueva definición, ya que cualquier diádica $P = \Sigma\alpha_i\mathbf{b}_i$ puede reducirse a la forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}\mathbf{p}_1 + \mathbf{j}\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}\mathbf{p}_3$$

expresando cada antecedente α_i en la forma (8.1), desarrollándolo en una suma de díadas y agrupando los términos en **i**, **j**, **k** por medio de las leyes distributivas (39.4-5). Así, cuando **P** y **Q** son diádicas (tales que **P**, **Q**, $\mathbf{P}_y$, $\mathbf{Q}_x$ sean continuas en R)

$$\iint \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}\right) dx\,dy = \mathbf{i}\iint \left(\frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial y}\right) dx\,dy + \text{cycl}$$
$$= \mathbf{i}\oint (\mathbf{p}_1\,dx + \mathbf{q}_1\,dy) + \text{cycl}$$

y, por lo tanto

$$\iint \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint \mathbf{P}\,dx + \mathbf{Q}\,dy. \tag{4}$$

Ejemplo 1. Cuando $Q = x/2$, $P = -y/2$, $Q_x - P_y = 1$; por lo tanto, por el teorema de Green:

$$\frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \iint dx\,dy = A, \tag{5}$$

es el área encerrada por la curva (43.5).

Haciendo $Q = x$, $P = 0$ o $P = -y$, tenemos también

$$A = \oint x\,dy = -\oint y\,dx. \tag{6}$$

Ejemplo 2. Con $Q = x^2$, $P = -y^2$, $Q_x - P_y = 2(x + y)$; por lo tanto, por el teorema de Green:

$$(7) \qquad \oint x^2\,dy - y^2\,dx = 2\int\int (x + y)\,dx\,dy = 2A(x^* + y^*),$$

donde (x^*, y^*) es el centroide del área encerrada por la curva.

Podemos usar (7) para comprobar los resultados del Ej. 43.3-4.

Para el triángulo del ejemplo 43.3, $A = 1$, $x^* = 0$, $y^* = 1/3$; por lo tanto la integral de circuito es igual a $-2/3$.

Para el círculo del ejemplo 43.4, $A = \pi$, $x^* = 0$, $y^* = 1$; por lo tanto la integral de circuito es igual a -2π.

Ejemplo 3. Si la curva cerrada C de la Fig. 47*a* se gira con respecto al eje x, el volumen generado es

$$V_x = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx = -\pi\int_a^b y_1^2\,dx - \pi\int_b^a y_2^2\,dx = -\pi\oint y^2\,dx.$$

Si C se gira con respecto al eje y, el volumen generado es

$$V_y = \pi\int_c^d (x_2^2 - x_1^2)\,dy = \pi\int_c^d x_2^2 + \pi\int_d^c x_1^2 = \pi\oint x^2\,dy.$$

Si aplicamos el teorema de Green a estas integrales de circuito, tenemos

$$V_x = 2\pi\int y\,dx\,dy = 2\pi y^* A, \qquad V_y = 2\pi\int x\,dx\,dy = 2\pi x^* A,$$

donde (x^*, y^*) es el centroide del área A encerrada por C.

Estos resultados se conocen como el teorema de Pappus.

PROBLEMAS

1. Resolver el problema 43.2 mediante el teorema de Green.
2. Resolver el problema 43.3 mediante el teorema de Green.
3. Encontrar el áera de un sector de la elipse $x = a\cos t$, $y = b$ sen t desde $t = 0$ hasta $t = \varphi$.
4. Encontrar el área de un sector de la hipérbola $x = a\cosh t$, $y = b$ senh t desde $t = 0$ hasta $t = \varphi$.
5. Encontrar el área del lazo del *folium de Descartes*:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

6. La epicicloide formada por un círculo de radio b que se desplaza rodando sobre un círculo de radio a tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = (a + b)\cos k\theta - b\cos(1 + k)\theta,$$
$$y = (a + b)\,\text{sen}\,k\theta - b\,\text{sen}\,(1 + k)\theta,$$

donde $k = b/a$ y θ es el ángulo que haya girado el círculo móvil. De-

mostrar que el área comprendida entre un arco de la epicicloide exterior y el círculo fijo está dada por

$$A = 3\pi b^2 + 2\pi b^2/a.$$

$$[x\,dy - y\,dx = b(1 + k)(1 + 2k)(1 - \cos\theta).]$$

7. Demostrar que el área vectorial (§11) dentro de una curva cerrada recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj es

$$A\mathbf{k} = \frac{1}{2}\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}.$$

Demostrar, por lo tanto, que un polígono en el plano xy cuyos vértices tengan los vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n$, tiene el área vectorial

$$A\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \cdots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{r}_1).$$

8. Demostrar que el área dentro de una curva cerrada en el plano xy tiene los momentos de inercia

$$I_x = \oint xy^2\,dy, \qquad I_y = -\oint x^2 y\,dx, \qquad I_z = \oint xy^2\,dy - x^2 y\,dx,$$

con respecto a los ejes coordenados.

Encontrar I_x, I_y, I_z para la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$.

9. Demostrar que

$$\frac{1}{3}\oint x^3\,dy - y^3\,dx = I_x,$$

es el momento de inercia con respecto al eje x del área incluida.

Encontrar I_z para el rectángulo cuyos vértices son $x = \pm a$, $y = \pm b$.

10. Calcular

$$\oint (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy$$

sobre la elipse $x = 2\cos t$, $y = \text{sen}\,t$ y verificar mediante el teorema de Green.

11. Calcular $\int x^2\,dx\,dy$ sobre el área interior al cuadrado (0, 0) — (4, 0) — (4, 4) — (0, 0) y exterior al rectángulo (1, 1) — (2, 1) — (2, 3) — (1, 3) — (1, 1). Verificar transformando la integral en una integral de línea sobre todo el contorno.

12. Calcular $\frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$ sobre el contorno dado en el problema 11. Verificar la respuesta.

13. Encontrar el área entre las parábolas $4y = x^2$, $4x = y^2$ mediante integración de circuito.

14. Calcular $\oint (xy - x^2)dx + x^2y\,dy$ sobre el triángulo delimitado por las rectas $y = 0$, $x = 1$, $y = x$ y verificar con el teorema de Green.

48. Formas vectoriales del teorema de Green. El teorema de Green admite dos interpretaciones vectoriales.

1. Pongamos

$$\mathbf{f} = [P, Q, 0], \qquad \text{rot } \mathbf{f} = [0, 0, Q_x - P_y].$$

Puesto que el vector unitario tangente al límite de $\mathscr{R}$ es

$$\mathbf{T} = [dx/ds, dy/ds, 0] \qquad (28.4),$$

la ecuación (47.1) se convierte en

$$\iint_R \mathbf{k} \cdot \text{rot } \mathbf{f}\, dA = \oint \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, ds, \tag{1}$$

donde $dA = dx\,dy$ es el elemento de área. Veremos que (1) es un caso especial del teorema de Stokes (§50).

La integral de la componente tangencial de un vector con respecto a una curva se llama su *circulación*. Así, la ecuación (1) establece que:

La circulación de un vector con respecto a una curva plana es igual a la integral de la componente de su rotación sobre el área incluida. El sentido de circulación y la normal forman una rosca a la derecha.

2. Pongamos

$$\mathbf{f} = [Q, -P, 0], \qquad \text{div } \mathbf{f} = Q_x - P_y.$$

Puesto que el vector unitario normal exterior al límite es

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = [dy/ds, -dx/ds, 0],$$

la ecuación (47.1) se convierte en

$$\iint_R \text{div } \mathbf{f}\, dA = \oint \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds. \tag{2}$$

Veremos que (2) es la versión plana del teorema de divergencia (§52).

La integral de la componente normal exterior de un vector con respecto a una curva se llama su *flujo normal*. Así, la ecuación (2) dice que:

El flujo normal de un vector a través de una curva plana

cerrada es igual a la integral de su divergencia sobre el área incluida.

Entonces, si aplicamos (1) y (2) al vector de posición $\mathbf{r} = [x, y, 0]$ en el plano xy, obtenemos

$$0 = \oint \mathbf{r} \cdot \mathbf{T}\, ds, \qquad 2A = \oint \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

El teorema de Green en la forma (1) permite una demostración sencilla del

TEOREMA. *Si* $\mathbf{f}$ *es un vector plano con primeras derivadas parciales continuas en una región* $\mathcal{R}$,

(3) $\quad \operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ *implica* que $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$

sobre todas las curvas cerradas regulares en la región, e inversamente,

(4) $\quad \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *implica* que $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$,

siempre que la región pueda ser dividida en subregiones cuyos límites sean cortados a lo más en dos puntos por rectas paralelas a los ejes.

Demostración. Cuando $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ en toda $\mathcal{R}$, (1) muestra que $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ en todas las curvas cerradas regulares en $\mathcal{R}$.

Inversamente, si $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ en todas las curvas cerradas regulares, tienen

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = (Q_x - P_y)\,\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{R}.$$

Puesto que, si la función continua $Q_x - P_y \neq 0$ en cualquier punto interior (x_0, y_0) de la región, podemos siempre encontrar un círculo alrededor de (x_0, y_0) dentro del cual $Q_x - P_y$ conserve el mismo signo. † Integrando sobre su límite, tenemos $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ por (1), lo que es contrario a la hipótesis. Así, $Q_x - P_y = 0$ en todos los puntos interiores y, por continuidad, también en el límite. Pero $Q_x - P_y = 0$ implica que $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$.

† *Advanced Calculus*, §74.

49. Integrales de superficie. Las ecuaciones paramétricas de una superficie S,

$$(1) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

pueden combinarse en una sola ecuación vectorial

$$(2) \qquad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}(u, v).$$

Las *curvas paramétricas* de la superficie,

$$v = \text{constante (las curvas-}u\text{)}$$

$$u = \text{constante (las curvas-}v\text{)},$$

tienen vectores tangentes $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$, respectivamente, y, en un *punto regular* de la superficie (§36), el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$. Las longitudes de los vectores $r_u\,du$, $\mathbf{r}_v\,dv$ son los elementos de arco en las curvas paramétricas, y el área vectorial del paralelogramo que forman,

$$(3) \qquad d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,du\,dv,$$

se llama *elemento vectorial de área* sobre la superficie. Su magnitud

$$(4) \qquad dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv$$

es el *elemento escalar de área*. Si tomamos a los parámetros u, v como coordenadas rectangulares en el plano uv, cualquier región S' de este plano corresponde a una región de la superficie cuya área está definida como la integral doble

$$(5) \qquad S = \int\int_{S'} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv.$$

Puede demostrarse que el área de la superficie así calculada es independiente de la elección de los ejes rectangulares x, y, z y también de la elección de los parámetros u, v. † Más aún, dS se reduce a $dx\,dy$ en el plano xy: $x = u$, $y = v$, $z = 0$, puesto que

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{r}_v = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{k}, \qquad dS = du\,dv = dx\,dy.$$

La cantidad $|\mathbf{r}_u \times r_v|$ puede expresarse en términos de las cantidades fundamentales para la superficie, es decir,

$$(6) \qquad E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \qquad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \qquad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v.$$

† *Advanced Calculus*, §164.

De (14.2),

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2,$$

y por lo tanto

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}. \tag{7}$$

Sobre una superficie *bilateral* (de dos caras), es posible distinguir una cara de la otra —por ejemplo, pintando las caras de diferente color. † Sobre una superficie bilateral $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, la cara positiva es la cara hacia la cual apunta la normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Si $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es cualquier función vectorial definida sobre la superficie, la integral

$$\int\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_{S'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du \, dv \tag{8}$$

se llama integral de superficie sobre la cara positiva de S. Poniendo

$$dS = \mathbf{n} \, dS \tag{9}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal en la dirección de $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, podemos también escribir (8) en la forma

$$\int\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int\int_{S'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \tag{10}$$

donde $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ es la componente normal de $\mathbf{f}$ sobre la superficie.

Compárese ahora la integral de línea

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

con la integral de superficie

$$\int\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS;$$

la primera integra las componentes tangenciales de un vector sobre una curva, la segunda integra las componentes normales de un vector sobre una superficie.

50. Teorema de Stokes. Considérese una superficie bilateral que sea continua en casi todos sus puntos. Tal superficie

---

† Una cinta de Mobius, que se forma dando un giro de 180° a una cinta de papel y uniendo entonces sus extremos, es una *superficie unilateral.* Si intentamos pintar un lado, la pintaremos toda, puesto que solamente tiene una cara.

consta de porciones S que tienen una ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ y sobre las cuales el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es continuo. Más todavía, suponemos que $\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$. † El lado positivo de S es el lado hacia la cual apunta $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ y, una persona de pie sobre el lado positivo, tendrá a S a su izquierda cuando recorra su límite en sentido positivo.

La forma vectorial del teorema de Green,

$$\iint \mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f}\, dA = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}, \tag{48.1}$$

que convierte a la integral de superficie de rot $\mathbf{f}$ sobre una región plana en la integral de circuito de $\mathbf{f}$ sobre su límite, puede generalizarse para ser aplicada a superficies curvas; necesitamos solamente reemplazar el elemento vectorial de área,

$$\mathbf{k}\, dA = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\, dx\, dy \quad \text{by} \quad \mathbf{n}\, dS = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du\, dv,$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal en la dirección de $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

TEOREMA DE STOKES. *Sea S una superficie consistente en porciones continuas y limitadas por curvas regulares cerradas. Entonces, si la función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ tiene un gradiente $\nabla\mathbf{f}$ continuo sobre S, la integral de superficie de* rot $\mathbf{f}$ *sobre S es igual a la integral de circuito de $\mathbf{f}$ sobre su límite C en el sentido positivo:*

(1) $$\iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f}\, dS = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Demostración. Será suficiente demostrar (1) para una porción continua de la superficie sobre la cual $\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$; ya que, si tales ecuaciones para todas las porciones continuas se suman, obtenemos (1). Nótese, que sumando todas las integrales de circuito, todos los límites internos se recorren dos veces y en direcciones opuestas de tal manera que las integrales de línea correspondientes se cancelan.

Podemos suponer, por lo tanto, que S es continua y limitada por una curva cerrada regular C. Sea S' la región del plano uv que contiene todos los valores de los parámetros u, v correspondientes a los puntos de S (Fig. 50*a*). Más aún, su-

† Este es ciertamente el caso en que las funciones en (49.1) tienen sus segundas derivadas parciales continuas. *Advanced Calculus*, §82.

ponemos que S está restringida de tal manera que la correspondencia $(u, v) \leftrightarrow (x, y, z)$ es biunívoca. Si ponemos

$$\mathbf{n}\, dS = \mathbf{dS} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du\, dv,$$

la integral de superficie en (1) se convierte en

$$\iint_{S'} (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f}\, du\, dv \tag{2}$$

tomada sobre la región S' del plano. La curva C que forma el límite de S se representa en una curva C', el límite de S', y

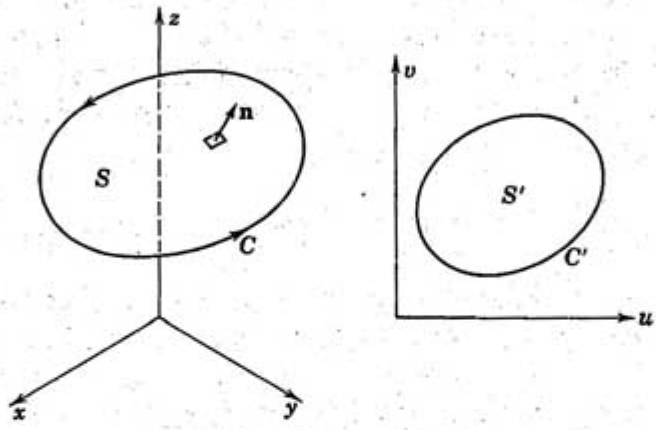


Fig. 50*a*. La superficie S transformada a una región plana S'.

la integral de circuito en (1) puede calcularse como una integral de circuito sobre C':

$$\oint_{C'} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv). \tag{3}$$

Aplicamos ahora el teorema de Green en el plano uv para demostrar que las integrales (2) y (3) son iguales.

Haciendo uso de la fórmula (14.2),

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

encontramos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} &= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{f}_x + \mathbf{j} \times \mathbf{f}_y + \mathbf{k} \times \mathbf{f}_z) \\ &= x_u\, \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f}_x - x_v\, \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f}_x + \\ &\quad y_u\, \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f}_y - y_v\, \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f}_y + \\ &\quad z_u\, \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f}_z - z_v\, \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f}_z,\end{aligned}$$

y, por lo tanto, según la regla de la cadena,

$$(4)\quad (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f}_u - \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f}_v = (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f})_u - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f})_v,$$

puesto que $\mathbf{r}_{vu} = \mathbf{r}_{uv}$. Si substituimos este valor en (2), podemos transformar la integral por medio del teorema de Green haciendo corresponder $u, v, \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f}, \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f}$ con x, y, P, Q en (47.1); así encontramos

$$\iint_{S'} [(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f})_u - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f})_v]\, du\, dv = \oint_{C'} (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f})\, du + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f})\, dv,$$

que es precisamente la integral (3). Así se completa la demostración.

Ejemplo. Verifiquemos el teorema de Stokes para el vector $\mathbf{f} = [x + y, 2x - z, y + z]$, tomado sobre el triángulo ABC formado por las intersecciones del plano $3x + 2y + z$ con los planos coordenados (Fig. 50*b*).

Si las ecuaciones paramétricas del plano se toman como

$$x = u,\quad y = v,\quad z = 6 - 3u - 2v$$

su normal positiva $\mathbf{n}$ tiene la dirección de

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [1, 0, -3] \times [0, 1, -2] = [3, 2, 1],$$

y el elemento vectorial de área es

$$\mathbf{n}\,dS = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du\, dv = [3, 2, 1]\, dx\, dy.$$

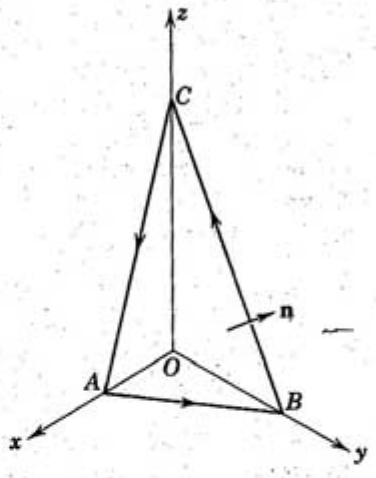


Fig. 50*b*. Integral de circuito calculada mediante el teorema de Stokes.

Puesto que $\operatorname{rot} \mathbf{f} = [2, 0, 1]$,

$$\iint_{ABC} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f}\, dS = 7 \iint_{AOB} dx\, dy = 7 \cdot 3 = 21;$$

para el área del triángulo AOB (la proyección de ABC en plano xy) es 3. Correspondiendo a la dirección de $\mathbf{n}$, el sentido positivo del circuito es ABC. La integral de circuito

$$\oint_{ABC} (x + y)\, dx + (2x - z)\, dy + (y + z)\, dz,$$

es la suma de las integrales de línea sobre AB, BC, CA, que demuestran ser 1, 36, -16, respectivamente. Así, el teorema se verifica $(21 = 1 + 36 - 16)$.

PROBLEMAS

1. Verificar el teorema de Stokes para $\mathbf{f} = [2y + z, x - z, y - x]$ tomado sobre el triángulo ABC formado por las intersecciones del plano $x + y + z = 1$ con los planos coordenados.

[Si $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, las integrales de línea sobre AB, BC, CA son $-\frac{1}{2}$, 1, 1; por lo tanto $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 3/2$ sobre ABC.]

2. Verificar el teorema de Stokes para el vector $\mathbf{f} = [z, x, y]$ tomado sobre la mitad de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sobre el plano xy.

$\left[\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ se reduce a $\oint x\, dy = \pi a^2.\right]$

3. Calcular $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor del círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $z = 3$, cuando $\mathbf{f} = [-y, x, 2]$.

4. Si $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ tienen gradientes continuos, demostrar que

$$\int\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla u \times \nabla v \, dS = \oint_C u \, dv,$$

donde S es una porción de una superficie limitada por una curva cerrada C.

5. Cuando $u = \rho^2/2$, $v = \varphi$ en el Prob. 4, demostrar que

$$\int\int_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{2} \oint_C \rho^2 \, d\varphi.$$

[Ver Ej. 37.2; ρ, φ son las coordenadas cilíndricas del Ej. 42.1.]

51. Teorema de Stokes generalizado. Con las mismas condiciones en la función $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ y en la superficie, podemos demostrar la transformación más general

$$\int\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \mathbf{f} = \oint_C d\mathbf{r}\, \mathbf{f} \tag{1}$$

entre las integrales de diádicas. En la integral de superficie, el vector $d\mathbf{S} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, du\, dv$ se multiplica vectorialmente por los vectores de $\nabla \mathbf{f}$ por la izquierda: así

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \times (\mathbf{i}\mathbf{f}_x + \mathbf{j}\mathbf{f}_y + \mathbf{k}\mathbf{f}_z) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \times \mathbf{i}\mathbf{f}_x + \text{cycl.}$$

Si hacemos ahora uso de la fórmula

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \tag{12.1}$$

encontramos que

$$\begin{aligned}
(2)(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \times \nabla \mathbf{f} &= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \times (\mathbf{i}\mathbf{f}_x + \mathbf{j}\mathbf{f}_y + \mathbf{k}\mathbf{f}_z) \\
&= (x_u \mathbf{r}_v - x_v \mathbf{r}_u)\mathbf{f}_x + (y_u \mathbf{r}_v - y_v \mathbf{r}_u)\mathbf{f}_y + (z_u \mathbf{r}_v - z_v \mathbf{r}_u)\mathbf{f}_z \\
&= \mathbf{r}_v(x_u \mathbf{f}_x + y_u \mathbf{f}_y + z_u \mathbf{f}_z) - \mathbf{r}_u(x_v \mathbf{f}_x + y_v \mathbf{f}_y + z_v \mathbf{f}_z) \\
&= \mathbf{r}_v \mathbf{f}_u - \mathbf{r}_u \mathbf{f}_v \\
&= (\mathbf{r}_v \mathbf{f})_u - (\mathbf{r}_u \mathbf{f})_v.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Green (47.4) en el que **P** y **Q** son diádicas, tenemos

$$\begin{aligned}\iint_S d\mathbf{S}\times\nabla\mathbf{f} &= \iint_{S'}[(\mathbf{r}_v\,\mathbf{f})_u-(\mathbf{r}_u\,\mathbf{f})_v]\,du\,dv\\ &= \oint_{C'}\mathbf{r}_u\,\mathbf{f}\,du+\mathbf{r}_v\,\mathbf{f}\,dv\\ &= \oint_{C'}(\mathbf{r}_u\,du+\mathbf{r}_v\,dv)\mathbf{f}\\ &= \oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{f}\end{aligned}$$

como se establece en (1). En esta ecuación es esencial el *orden* de los vectores.

La ecuación diádica (1) da otras dos tomando invariantes escalares y vectoriales (§39). Puesto que las multiplicaciones escalar y vectorial son distributivas con respecto a la adición, cualquier invariante de una integral diádica es igual a la integral de la invariante. Así, las invariantes escalares y vectoriales de las integrales diádicas en (1) pueden tomarse *bajo el signo de integral.*

Tomando el invariante escalar, el integrando de la integral de superficie (aparte de $du\,dv$) se convierte en

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\times\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_x+\text{cycl} &= (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{f}_x+\text{cycl})\\ &= (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\cdot\text{rot}\,\mathbf{f};\end{aligned}$$

y la integral de circuito se convierte en $\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}$. Así, en vista de (50.2), obtenemos de nuevo el teorema de Stokes.

Tomando la invariante vectorial, el integrando de la integral de superficie se convierte en

$$\begin{aligned}[(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\times\mathbf{i}]\times\mathbf{f}_x+\text{cycl} &= (\mathbf{i}\mathbf{f}_x+\text{cycl})\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)-(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_x+\text{cycl})\\ &= \nabla\mathbf{f}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)-(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,\text{div}\,\mathbf{f};\end{aligned}$$

y la integral de circuito se convierte en $\oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}$. Así, escribiendo $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,du\,dv=\mathbf{n}\,dS$, obtenemos el nuevo teorema

$$\iint_S\{(\nabla\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}-\mathbf{n}\,\text{div}\,\mathbf{f}\}\,dS=\oint_C d\mathbf{r}\times\mathbf{f}. \tag{3}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{f} = \mathbf{r}$, el vector de posición de la superficie, $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I}$, div $\mathbf{r} = 3$ por (40.8), y (3) se convierte en

$$\iint_S \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r}. \tag{4}$$

Esto expresa el área vectorial de una superficie como una integral de circuito alrededor de su límite. Así, sobre la mitad superior H de un hemisferio de radio a, $\mathbf{r} = a\mathbf{R}$, $d\mathbf{r} = a\mathbf{P}\, d\theta$, y su área vectorial

$$\iint_H \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} \mathbf{R}\times\mathbf{P}\, d\theta = \pi a^2\mathbf{k}.$$

PROBLEMAS

1. Si la curva cerrada C encierra una porción S de una superficie, demostrar que

$$\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{r}\, dS = \frac{1}{2}\oint_C r^2\, d\mathbf{r}.$$

2. Si $\mathbf{f} = \mathbf{j}\,u(x, y) + \mathbf{j}\,v(x, y)$, demostrar que

$$\oint_C \mathbf{f}\times d\mathbf{r} = \mathbf{k}\int_A \operatorname{div}\mathbf{f}\, dA,$$

donde C es una curva cerrada en el plano xy que encierra a la región A.

3. Demostrar que el área vectorial de una superficie cerrada es nula.

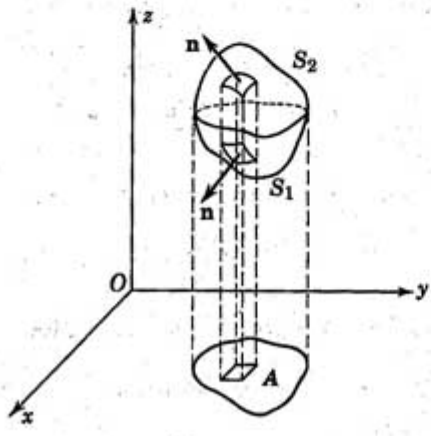


Fig. 52a. Región limitada por una superficie cerrada.

52. Teorema de divergencia. Una transformación básica de integrales de volumen a integrales de superficie está dada por el

TEOREMA DE DIVERGENCIA (GAUSS). *Si la función vectorial* $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ *tiene primeras derivadas parciales continuas en la región* V, *limitada por una superficie cerrada* S *sobre la cual la normal unitaria externa* $\mathbf{n}$ *es continua en secciones, entonces la inte-*

gral de volumen de div **f** *dentro de S es igual a la integral de superficie externa de* **f** *sobre S:*

$$(1) \qquad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f}\, dV = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS.$$

Demostración. Puesto que

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{f}_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_z \quad (40.2), \qquad (40.2),$$

la integral de volumen de div **f** es la suma de tres integrales. A fin de calcular la integral de $\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_z$, consideramos primero una superficie S tal que una recta paralela al eje z la corta a lo más dos veces (Fig. 52*a*); denótense estos puntos por (x, y, z_1) y (x, y, z_2) donde $z_1 < z_2$. Entonces S tiene una porción inferior S_1 que consiste en los puntos (x, y, z_1) y una porción superior S_2 que consiste en los puntos (x, y, z_2). Los puntos para los cuales $z_1 = z_2$ forma una curva cerrada que separa a S_1 de S_2. Ahora, si S_1 y S_2 se proyectan en un área A del plano xy,

$$(2) \qquad \iiint_V \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_A dx\, dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\, dz$$

$$= \iint_A \mathbf{f}(x, y, z_2)\, dx\, dy - \iint_A \mathbf{f}(x, y, z_1)\, dx\, dy.$$

Si tomamos a x, y como los parámetros u, v en las superficies S_1 y S_2, el elemento vectorial de área es $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\, dx\, dy$ (49.3). Ahora, de

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z(x, y), \qquad \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \mathbf{k}z_x, \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \mathbf{k}z_y,$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \mathbf{k} - \mathbf{i}z_x - \mathbf{j}z_y.$$

Sobre S_2, $z = z_2(x, y)$ y el vector $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ tiene la dirección de la normal externa **n**; pero, sobre S_1, $z = z_1(x, y)$ y $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ tiene la dirección de la normal interna $-\mathbf{n}$. Por lo tanto, si $\mathbf{n}\, dS$ denota al elemento vectorial *externo* de área en S,

$$\mathbf{n}\, dS = \pm(\mathbf{k} - \mathbf{i}z_x - \mathbf{j}z_y)\, dx\, dy, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, dS = \pm dx\, dy,$$

donde el signo más se aplica a S_2 y el signo menos a S_1. Las dos integrales sobre A pueden ahora ser combinadas en una sola integral sobre S y podemos escribir

$$(3) \qquad \iiint_V \mathbf{f}_z\, dx\, dy\, dz = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, \mathbf{f}(x, y, z)\, dS.$$

Esta fórmula es válida también cuando S está limitada lateralmente por una parte de un cilindro paralelo al eje z que separa a S_1 de S_2, puesto que (2) es válido como antes y, en (3), $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre el cilindro, de tal manera que no contribuye a la integral sobre S.

Podemos ahora quitar la condición de que S sea cortado solamente en dos puntos por una paralela al eje z, puesto que si dividimos a V en partes limitadas por superficies que satisfagan esta condición y aplicamos la fórmula (3) a cada punto sumando después los resultados, las integrales de volumen se combinarán en el miembro izquierdo de (3) y las integrales de superficie sobre los límites entre las partes se cancelan (puesto que cada una aparece dos veces pero con valores opuestos de $\mathbf{n}$), mientras que las restantes integrales de superficie se combinan en el miembro izquierdo de (3).

Finalmente, podemos extender (3) a regiones limitadas por dos o más superficies cerradas, esto es, regiones con cavidades dentro de ellas, mediante este mismo proceso de subdivisión. Deben introducirse superficies adicionales de tal manera que las partes de V estén todas ellas acotadas por una sola superficie cerrada y las integrales de superficie sobre ellas se cancelen por parejas, como antes.

Cuando x, y, z forman un sistema dextrorso de ejes, lo mismo es válido para y, z, x y para z, x, y. Por lo tanto, si en (3) hacemos intercambios cíclicos en x, y, z, obtenemos las fórmulas correspondientes:

$$\text{(4)} \qquad \iiint_V \mathbf{f}_x \, dx\, dy\, dz = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}\, \mathbf{f}(x, y, z)\, dS,$$

$$\text{(5)} \qquad \iiint \mathbf{f}_y \, dx\, dy\, dz = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}\, \mathbf{f}(x, y, z)\, dS.$$

Ahora, multiplicamos escalarmente (3), (4) y (5) por $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, respectivamente y sumamos las ecuaciones resultantes. Entonces, la integral de volumen se convierte en

$$\iiint (\mathbf{i} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{f}_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_z)\, dx\, dy\, dz = \iiint \operatorname{div} \mathbf{f}\, dV;$$

y la integral de superficie en

$$\iint \mathbf{n} \cdot (\mathbf{i}\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{j}\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{k}\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{f})\, dS = \iint \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS.$$

Esto demuestra la fórmula (1).

Las integrales de volumen y de superficie se denotan frecuentemente mediante un solo signo de integral cuando la diferencial dV o dS indica su carácter. Más aún, $\oint \cdots dS$ se usa para denotar integración sobre una superficie *cerrada*. En esta notación el teorema de divergencia se convierte en

$$(1)' \qquad \int_V \operatorname{div} \mathbf{f}\, dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS.$$

Con condiciones apropiadas en $\mathbf{f}$, el teorema de divergencia se aplica a una *región infinita* V_∞ fuera de una superficie cerrada S.

TEOREMA 2. *Con las condiciones anteriores en* $\mathbf{f}$ *y en* S, *tenemos*

$$(6) \qquad \int_{V_\infty} \operatorname{div} \mathbf{f}\, dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS$$

siempre que

$$(7) \qquad \lim_{r \to \infty} r^2 \mathbf{f} \to 0 \text{ } \textit{uniformemente.}$$

donde $\mathbf{r}$ *es la distancia desde cualquier punto fijo* P *y el vector normal unitario* $\mathbf{n}$, *exterior a la región* V_∞, *apunta hacia el interior de* S.

Demostración. Sea Σ una esfera alrededor de P lo suficientemente grande como para contener a S completamente. Entonces el teorema de divergencia aplicado a la región V entre S y Σ nos da

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f}\, dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS + \oint_\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS,$$

siendo $\mathbf{n}$ un vector normal exterior con respecto a la región V. La aproximación uniforme de $r^2\mathbf{f}$ a cero quiere decir que

$$r^2|\mathbf{f}| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad r > R,$$

un valor convenientemente grande. Si el radio r de Σ se elige $> R$, tenemos

$$\left| \oint_\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS \right| \leqq \oint_\Sigma |\mathbf{f}|\, dS < \frac{\varepsilon}{r^2} \oint_\Sigma dS = 4\pi\varepsilon,$$

y en consecuencia la integral de superficie sobre Σ tiende a

cero a medida que $r \to \infty$. Al mismo tiempo, $V \to V_\infty$, y el teorema está demostrado.

Ejemplo 1. Cuando $\mathbf{f} = \mathbf{r}$, div $\mathbf{r} = 3$; entonces, de (1)

$$V = \frac{1}{3}\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\,dS = \frac{1}{3}\oint_S p\,dS,$$

donde p es la perpendicular al plano tangente a S desde O en la extremidad de $\mathbf{r}$. Así, el volumen dentro de S se expresa como una integral de superficie sobre S.

Para un *cono* de base B, altura h, tómese O en el vértice. Entonces, $p = 0$ sobre la superficie lateral, $p = h$ sobre la base y $V = 1/3Bh$.

Para una *esfera* de radio a, tómese O en el centro. Entonces, $p = a$ y $V = 1/3aS = 4/3\pi a^3$.

Ejemplo 2. Ángulo sólido. Los radios desde un punto O que pasan por los puntos de una curva cerrada generan un cono. La superficie de una esfera unitaria con centro en O que es interceptada por este cono, se llama el ángulo *sólido* Ω del cono.

Apliquemos el teorema de divergencia al vector

$$\mathbf{f} = -\nabla\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

en la región interior a un cono de ángulo sólido Ω que está limitado externamente por una superficie S e internamente por una porción σ de una esfera pequeña de radio a con centro en O (Fig. 52*b*). Dentro de esta región, $\mathbf{f}$ tiene primeras derivadas parciales continuas y, por el Ejemplo 41.1,

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = -\nabla^2\frac{1}{r} = 0, \quad \text{y, por lo tanto} \quad \oint \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,dS = 0.$$

Sobre la pequeña esfera, la normal externa $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/a$; mientras que sobre la superficie cónica $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$. Entonces,

$$\oint \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,dS = \int_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS - \int_\sigma \frac{\mathbf{r}}{a}\cdot\frac{\mathbf{r}}{a^3}\,dS = \int_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS - \frac{\sigma}{a^2} = 0.$$

Pero, puesto que $\sigma/a^2 = \Omega/1^2$, tenemos

$$\Omega = \int_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = -\int_S \mathbf{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{8}$$

Si S es superficie cerrada, tenemos

$$-\oint_S \mathbf{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dS = \begin{cases} 4\pi, & O \text{ dentro de S} \\ 0, & O \text{ fuera de } S. \end{cases} \tag{9}$$

Cuando O está fuera de S, $\mathbf{f}$ tiene primeras derivadas parciales continuas en todo su interior, y (9) se deduce inmediatamente de (1). En

este caso los elementos de ángulo sólido $d\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}\, dS/r^3$ correspondientes a los mismos elementos de cono, se cancelan por parejas.

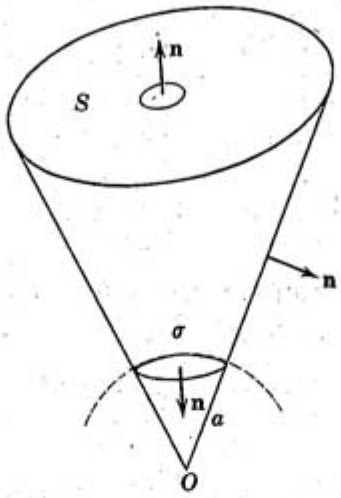


Fig. 52*b*. Ángulo sólido.

Ejemplo 3. Si div $\mathbf{f} = 0$ en una región V, el flujo normal de $\mathbf{f}$ es nulo sobre cualquier superficie cerrada que satisfaga los requisitos del teorema de divergencia:

$$\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS = 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = 0. \tag{10}$$

Supongamos ahora que div $\mathbf{f} = 0$ en una región simplemente conexa V, excepto en una superficie S que divide a S en dos partes V_1 y V_2 y en la cual $\mathbf{f}$ tiene discontinuidades finitas. Podemos entonces demostrar, por un argumento semejante al dado al final de §46, que $\oint \mathbf{n} : \mathbf{f}\, dS = 0$ sobre todas las superficies cerradas en V *si la componente normal de* $\mathbf{f}$ *es continua en* S.

PROBLEMAS

1. Verificar el teorema de divergencia para el vector $\mathbf{f} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ tomado sobre el cubo $0 \leqq x, y, z \leqq 1$.

2. Encontrar $\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS$ para el vector $\mathbf{f} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

3. Encontrar un vector $\mathbf{f} = g(r)\mathbf{r}$ tal que div $\mathbf{f} = r^m (m > -3)$. Demostrar que

$$\int r^m\, dV = \frac{1}{m+3} \oint r^m\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

4. El vector $\mathbf{f} = k\nabla(1/r)$, donde r es la distancia desde un punto O, representa una atracción que varía como $1/r^2$ (ley de la inversa del cuadrado). Si S es una superficie cerrada alrededor de O, demostrar que

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS = -4\pi k.$$

5. Si $\mathbf{f} = \nabla\varphi$ y div $\mathbf{f} = 0$, demostrar que div $(\varphi\mathbf{f}) = |\mathbf{f}|^2$, y, por lo tanto

$$\int_V |\mathbf{f}|^2\, dV = \oint_S \varphi\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

donde V es la región dentro de la superficie cerrada S.

6. Demostrar que, $m > -1$,

$$\int_V r^{m-1}\, \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{m+1} \oint_S r^{m+1}\, \mathbf{n}\, dS.$$

[Aplicar (53.3).]

7. Si $\mathbf{f} = [x^2 - z^2,\ 2xy,\ y^2 + z]$, encontrar $\oint \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS$ sobre

(*a*) la superficie de un cubo limitado por los seis planos $x = y = z = 0$, $x = y = z = 1$.

(*b*) la superficie limitada por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 0$, $x = 2$.

8. El vector

$$\mathbf{f} = \begin{cases} \mathbf{i}x - \mathbf{j}y + \mathbf{k}z & z > 0, \\ \mathbf{0} \quad \text{cuando} & z = 0, \\ -\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z & z < 0. \end{cases}$$

Demostrar que $\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS = 0$ sobre cualquier superficie cerrada.

9. Aplicar el teorema de divergencia a $\mathbf{P} \times \text{rot } \mathbf{Q}$ para demostrar las identidades

$$\int (\text{rot } \mathbf{P}) \cdot (\text{rot } \mathbf{Q})\, dV - \int \mathbf{P} \cdot \text{rot rot } \mathbf{Q}\, dV = \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \times \text{rot } \mathbf{Q}\, dS,$$

$$\int (\mathbf{Q} \cdot \text{rot rot } \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \text{rot rot } \mathbf{Q})\, dV = \oint \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} \times \text{rot } \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \text{rot } \mathbf{P})\, dS.$$

10. Calcular $\oint (ax^2 + by^2 + cz^2)\, dS$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [Usar (52.1); $\mathbf{n} = [x, y, z]$; encontrar f.]

11. Calcular $\oint (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{-\frac{1}{2}}\, dS$ y $\oint (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}}\, dS$ sobre el elipsoide $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. [Usar (52.1); encontrar n, después f.]

53. Teorema de divergencia generalizado. Podemos usar las ecuaciones (3), (4) y (5) del artículo anterior para demostrar el más general

TEOREMA. *Si el vector* $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ *tiene primeras derivadas parciales continuas en una región* V *limitada por una superficie cerrada,* S *entonces*

$$\int_V \nabla \mathbf{f}\, dV = \oint_S \mathbf{n}\,\mathbf{f}\, dS. \tag{1}$$

Demostración. La integral de volumen en (1) es igual a

$$\mathbf{i}\int \mathbf{f}_x\, dV + \mathbf{j}\int \mathbf{f}_y\, dV + \mathbf{k}\int \mathbf{f}_z\, dV; \tag{i}$$

y, puesto que

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{j}\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{k}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n},$$

la integral de superficie es igual a

$$\mathbf{i}\oint \mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{f}\, dS + \mathbf{j}\oint \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{f}\, dS + \mathbf{k}\oint \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{f}\, dS. \tag{ii}$$

Puesto que las integrales correspondientes en (i) y (ii) son iguales, queda establecido (1).

La ecuación diádica (1) da otras dos tomando las invariantes escalar y vectorial bajo el signo de integral como en §52. Puesto que la invariante escalar de $\nabla\mathbf{f}$ es div $\mathbf{f}$, la primera de estas ecuaciones es de nuevo el teorema de divergencia. Pero la invariante vectorial de $\nabla\mathbf{f}$ es rot $\mathbf{f}$ y obtenemos el nuevo teorema:

$$\int_V \operatorname{rot}\mathbf{f}\, dV = \oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{f}\, dS. \tag{2}$$

Si en (1) ponemos $\mathbf{f} = f\mathbf{e}$, donde el escalar $f(\mathbf{r})$ tiene primeras derivadas parciales continuas y $\mathbf{e}$ es un vector constante, obtenemos

$$\int_V \nabla f\, dV = \oint_S \mathbf{n} f\, dS. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Poniendo $f = 1$ en (3), se tiene

$$\oint \mathbf{n}\, dS = 0. \tag{4}$$

Poniendo $\mathbf{f} = \mathbf{r}$ en (2), puesto que rot $\mathbf{r} = 0$,

$$\oint \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, dS = 0. \tag{5}$$

De (4) y (5) deducimos que una superficie cerrada está en equilibrio bajo cualquier sistema de presiones normales $-\mathbf{n}p$ de magnitud constante p, puesto que su suma vectorial y su momento vectorial con respecto a O son nulos.

Ejemplo 2. Poniendo $f = \frac{1}{2}r^2$ en (3), se tiene $\nabla f = \mathbf{r}$, y el miembro izquierdo

$$\oint \mathbf{r}\, dV = V\mathbf{r}^*,$$

donde $\mathbf{r}^*$ localiza el centroide de V. Entonces

$$V\mathbf{r}^* = \frac{1}{2}\oint r^2 \mathbf{n}\, dS. \tag{6}$$

54. Vectores solenoidales. Se dice que una función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es solenoidal en una región V si div $\mathbf{f} = 0$ en V.

TEOREMA 1. *El vector* $\mathbf{g}$ *es solenoidal en cualquiera región en la cual* $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ *tenga segundas derivadas parciales continuas.*

Demostración. Sea $\mathbf{g} = \mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2 + \mathbf{k}g_3$; entonces (§40)

$$\text{rot } \mathbf{g} = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}, \tag{1}$$

y

$$\text{div rot } \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right) = 0,$$

puesto que las derivadas combinadas se cancelan por parejas.

COROLARIO. *El vector* $\nabla u \times \nabla v$ *es solenoidal;* puesto que

$$\nabla u \times \nabla v = \text{rot}\,(u\nabla v) \tag{41.5}$$

Demostraremos ahora la inversa del Teorema 1. Para evitar complicaciones, consideraremos el caso en que la región V es un prisma rectangular.

TEOREMA 2. Si div $\mathbf{f} = 0$ en un prisma rectangular V, puede definirse una función vectorial de punto $\mathbf{g}$ en V tal que

$$\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{g}. \tag{2}$$

Demostración. Si $\mathbf{f} = \mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2 + \mathbf{k}f_3$,

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \qquad (40.5).$$

Obtendremos primero una solución particular **G** de (2) para la cual $G_3 = 0$:

$$\mathbf{G} = \mathbf{i}G_1 + \mathbf{j}G_2.$$

En vista de (1), $\mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ es equivalente a tres ecuaciones escalares:

$$\text{(4)} \qquad f_1 = -\frac{\partial G_2}{\partial z}, \qquad f_2 = \frac{\partial G_1}{\partial z}, \qquad f_3 = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

Si (x_0, y_0, z_0) es cualquier punto fijo de V, las dos primeras ecuaciones de (4) se satisfacen por

$$\text{(5)} \qquad G_2 = -\int_{z_0}^{z} f_1(x, y, z)\, dz, \qquad G_1 = \int_{z_0}^{z} f_2(x, y, z)\, dz + \alpha(x, y).$$

En estas integraciones, x e y se toman como parámetros constantes y $\alpha(x, y)$ es una función aún indeterminada. A fin de que G_1, G_2 satisfagan la tercera ecuación de (4), debemos tener

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dz - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = f_3,$$

o, en vista de (3),

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial f_3}{\partial z}\, dz - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = f_3(x, y, z).$$

Cuando realizamos la integración, esto se reduce a

$$-f_3(x, y, z_0) - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

una ecuación que se satisface al tomar

$$\alpha(x, y) = -\int_{y_0}^{y} f_3(x, y, z_0)\, dy.$$

Por lo tanto, el vector **G** cuyas componentes son

$$\text{(6)} \qquad G_1 = \int_{z_0}^{z} f_2(x, y, t)\, dt - \int_{y_0}^{y} f_3(x, t, z_0)\, dt, \qquad G_2 = -\int_{z_0}^{z} f_1(x, y, t)\, dt, \qquad G_3 = 0,$$

es una solución particular de (2) —como puede verificarse fácilmente calculando rot **G**.

Si $\mathbf{g}$ es cualquier otra solución de (2),

$$\text{rot}\,(\mathbf{g} - \mathbf{G}) = \mathbf{f} - \mathbf{f} = 0.$$

Así, $\mathbf{g} - \mathbf{G}$ es irrotacional y puede ser expresado como un vector gradiente ∇F (teorema 45.2). Por lo tanto, $\mathbf{g} - \mathbf{G} = \nabla F$ y la ecuación general de (2) es

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} + \nabla F, \tag{7}$$

donde $F(\mathbf{r})$ es una función arbitraria que tiene segunda derivada. Las componentes rectangulares de $\mathbf{g}$ se obtienen sumando $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial t$ a las componentes de $\mathbf{G}$ dadas en (6).

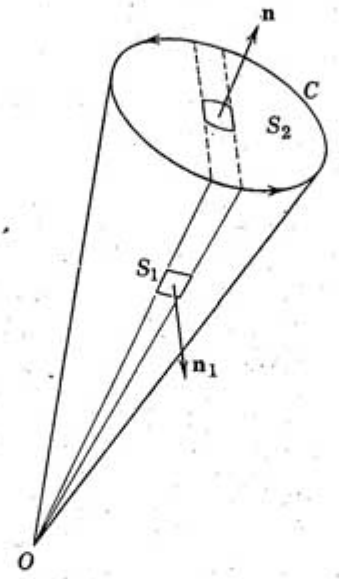


Fig. 54. Región cónica cerrada.

En física matemática el vector solenoidal $\mathbf{f} = \text{rot}\,\mathbf{g}$ se llama derivado del *vector potencial* $\mathbf{g}$.

Si C es una curva cerrada en la región V y S es cualquier superficie en el interior de C que satisfaga los requisitos del teorema de Stokes, el flujo normal por S de un vector solenoidal $\mathbf{f} = \text{rot}\,\mathbf{g}$ depende solamente de C y del potencial vectorial $\mathbf{g}$, puesto que, de (50.1)

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS = \int_S \mathbf{n} \cdot \text{rot}\,\mathbf{g}\, dS = \oint_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}.$$

El potencial vectorial de un vector solenoidal $\mathbf{f}$ puede encontrarse sin recurrir a las componentes. Del teorema de divergencia

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS = 0 \quad \text{si} \quad \text{div}\,\mathbf{f} = 0, \tag{8}$$

para cualquier superficie cerrada S. Denotemos con S_1 la superficie lateral de un cono con vértice en O que tenga a la curva cerrada C como directriz y límite (Fig. 54). Apliquemos ahora (8) a la superficie *cerrada* formada por S_1 y la "base" S_2 del cono (una porción de la superficie limitada por C). Por el teorema de Stokes, S_2 contribuye con

$$(9) \qquad \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS = \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g}\, dS = \oint_C \mathbf{g} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad 50.1$$

a la integral (8). Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es la ecuación de C, S_1 tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_1 = t\,\mathbf{r}(s), \qquad 0 < t \leqq 1;$$

y su elemento vectorial de área en la dirección de la normal extérna $\mathbf{n}_1$ es

$$\mathbf{n}_1\, dS = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t}\, ds\, dt = t\mathbf{T} \times \mathbf{r}(s)\, ds\, dt.$$

Por lo tanto, la contribución de S_1 a (8) es

$$(10) \qquad \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{f}\, dS = \int\int_{S_1} \mathbf{f}(t\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{r}\, t\, dt\, ds = \left[\oint_C \int_0^1 \mathbf{r} \times \mathbf{f}(t\mathbf{r}) t\, dt\right] \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Puesto que la suma de las integrales (9) y (19) es cero, tenemos

$$\oint_C \left[\mathbf{g} + \int_0^1 \mathbf{r} \times \mathbf{f}(t\mathbf{r}) t\, dt\right] \cdot \mathbf{T}\, ds = 0.$$

Como esto es válido para una curva arbitraria cerrada C, el vector entre paréntesis rectangulares es nulo; por lo tanto

$$(11) \qquad \mathbf{g} = -\mathbf{r} \times \int_0^1 \mathbf{f}(t\mathbf{r}) t\, dt$$

cuando la integral existe.

Cuando $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es homogénea de grado n, $\mathbf{f}(t\mathbf{r}) = t^n \mathbf{f}(\mathbf{r})$, y

$$(12) \qquad \mathbf{g} = -\mathbf{r} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) \int_0^1 t^{n+1}\, dt = \frac{\mathbf{f} \times \mathbf{r}}{n+2}, \qquad n > -2.$$

Cuando $n < -2$, (12) es válida, puesto que podemos integrar desde $t = \infty$ a $t = 1$ sobre la porción de cono más allá de S_2.

Ejemplo 1. Cuando $\mathbf{f} = [y, z, x]$, div $\mathbf{f} = 0$. La ecuación (6) da el potencial vectorial

$$\mathbf{G} = \left[\int_0^z t\,dt - \int_0^y x\,dt, \quad -\int_0^z y\,dt, \quad 0\right] = [\tfrac{1}{2}z^2 - xy, -yz, 0].$$

Puesto que $\mathbf{f}$ es homogénea de grado 1, el potencial vectorial dado

$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{3}\mathbf{f} \times \mathbf{r} = \tfrac{1}{3}[z^2 - xy, x^2 - yz, y^2 - zx].$$

La diferencia

$$\mathbf{G} - \mathbf{g} = \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{2}z^2 - 2xy, -2yz - x^2, -y^2 + zx]$$

es irrotacional. Podemos fácilmente expresar $\mathbf{G} - \mathbf{g}$ como ∇F por medio de (45.7):

$$F = \frac{1}{3}\int_0^x \left(\frac{1}{2}z^2 - 2xy\right) dx - \frac{1}{3}\int_0^y 2yz\,dy = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}xz^2 - x^2y - y^2z\right).$$

Ejemplo 2. El vector $\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ es solenoidal, puesto que, de (41.6)

$$\text{div}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \text{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot}\,\mathbf{r} = 0.$$

Puesto que $\mathbf{f}$ es homogénea de gado 1, el potencial vectorial dado por (12) es

$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{3}\mathbf{f} \times \mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}.$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que un vector constante $\mathbf{c}$ tiene el potencial escalar $\varphi = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ y el potencial $\mathbf{g} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$.

2. Encontrar el potencial vectorial de $\mathbf{f} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{b})$.

3. Encontrar el potencial vectorial del vector solenoidal $\mathbf{f}$ dado en (6) y también en (12) y verificar además que $\mathbf{g} - \mathbf{G}$ es irrotacional.

(*a*) $\mathbf{f} = [x, x, -z]$;
(*b*) $\mathbf{f} = [z - y, x - z, y - x]$;
(*c*) $\mathbf{f} = [xy, -y^2, yz]$;
(*d*) $\mathbf{f} = [z, x, y]$.

4. Encontrar el potencial vectorial de $\mathbf{f}$ a partir de (11) cuando

(*a*) $\mathbf{f} = r^3\,\mathbf{c} \times \mathbf{r}$;
(*b*) $\mathbf{f} = [x, 1, -z]$.

5. Si ρ, φ, z son coordenadas cilíndricas (Ej. 42.1), demostrar que $\nabla \log \rho$ y $\nabla\varphi$ son vectores solenoidales en cualquier región que no contenga al origen.

6. Si r, θ, φ, son coordenadas esféricas (Ej. 42.2), demostrar que $\nabla \log \tan \frac{1}{2}\theta$ es solenoidal en cualquier región que no incluya al eje z.

7. Demostrar que un vector $\mathbf{f}$ es irrotacional y solenoidal en un prisma rectangular R cuando y sólo cuando es el gradiente de una función armónica en R.

8. Demostrar que $\mathbf{f} = \mathbf{r}/r^3$ es irrotacional y solenoidal en todos los puntos, excepto en el origen.

55. Identidades de Green. Usaremos ahora el teorema de divergencia para demostrar tres importantes identidades debidas a George Green. †

Sean φ y ψ funciones escalares de punto con derivadas de primero y segundo orden continuas en una región V acotada por una superficie cerrada S. El teorema de divergencia (52.1) aplicado al vector $\mathbf{f} = \varphi \nabla \psi$ nos da ahora

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \nabla\psi)\, dV = \oint_S \varphi \frac{d\psi}{dn}\, dS.$$

En el caso de que ψ no esté definida en el exterior de S, reemplazamos $d\psi/dn$ por el inverso aditivo de la derivada a lo largo de la normal interna $-\mathbf{n}$. Ahora, por (41.4),

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla\psi) = \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi \nabla^2\psi,$$

puesto que $\operatorname{div} \nabla\psi = \nabla^2\psi$ (40.9); por lo tanto, escribiendo $\mathbf{n} \cdot \nabla\psi = d\psi/dn$,

$$(1) \qquad \int_V \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, dV + \int_V \varphi \nabla^2\psi\, dV = \oint \varphi \frac{d\psi}{dn}\, dS.$$

Esta fórmula se conoce como la *primera identidad de Green.*

Si tanto φ como ψ tienen derivadas continuas de primero y segundo orden, podemos intercambiar φ y ψ en (1). Restando este resultado de (1), obtenemos la *segunda identidad de Green:*

$$(2) \qquad \int_V (\varphi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2\varphi)\, dV = \oint_S \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) dS.$$

Tomamos ahora $\psi = 1/r$, donde r es la distancia desde un punto P. Si P es *interior* a S, no podemos aplicar (2) a toda la región, puesto que $1/r$ se hace infinito en P. Por lo tanto, excluimos a P rodeándolo por una pequeña esfera σ de radio ε y aplicamos (2) a la región V' entre S y σ; entonces, puesto que

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{en } V' \qquad \text{(Ej. 41.1)},$$

† George Green, *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*, Nottingham, 1828.

tenemos

$$(2)' \quad -\int_{V'} \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, dV = \oint_S \left[\varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\right] dS + \oint_\sigma \left[\varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\right] dS.$$

En la esfera σ, $r = \varepsilon$, y la normal externa está dirigida hacia P; entonces

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r};$$

y $dS = \varepsilon^2 d\Omega$, donde Ω es el ángulo sólido subtendido por dS en P. La integral sobre σ es, por lo tanto,

$$\oint_\sigma \left(\frac{\varphi}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\varepsilon^2\, d\Omega = \int \left(\varphi + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) d\Omega$$

y se acerca a $4\pi\,\varphi(P)$ a medida que $\varepsilon \to 0$. Más aún, a medida que $\varepsilon \to 0$, la integral de volumen

$$\int_{V'} \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, dV \to \int_V \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, dV;$$

puesto que el integrando permanece finito ya que podemos tomar $dV = r^2 d\Omega dr$ como el elemento de volumen en la vecindad de P. Así, pasando al límite $\varepsilon \to 0$, (2)′ nos da la *tercera identidad de Green:*

$$(3)\quad 4\pi\,\varphi(P) = -\int_V \frac{\nabla^2\varphi}{r}\, dV + \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, P \text{ en el interior de } S.$$

Cuando P es exterior a S, podemos poner $\psi = 1/r$ directamente en (2); obtenemos entonces

$$(4)\quad 0 = -\int_V \frac{\nabla^2\varphi}{r}\, dV + \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, P \text{ en el exterior de } S.$$

A fin de aplicar las identidades de Green a la región infinita V_∞ que consiste en una superficie cerrada S y de todo el espacio exterior a ella, requerimos que las funciones φ y ψ se anulen en el infinito, de acuerdo con la siguiente

DEFINICIÓN. Una función φ se llama *regular en el infinito* cuando $r|\varphi|$ y $r^2|\nabla\varphi|$ están uniformemente limitadas a medida que $r \to \infty$:

$$(5)\qquad r|\varphi| \quad \text{y} \quad r^2|\nabla\varphi| < M \quad \text{cuando} \quad r > R,$$

un valor suficientemente grande; o, en la notación-O †

$$(5)' \qquad \varphi = O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad |\nabla\varphi| = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Esta condición implica que los vectores $\varphi\nabla\psi$ y $\psi\nabla\varphi$ tengan la propiedad (7) requerida en el teorema 52.2. Por ejemplo, $r^3|\varphi\nabla\psi| < M^2$ cuando $r > R$, y, en consecuencia

$$r^2\varphi\,|\nabla\psi| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad r > M^2/\varepsilon.$$

Así, el teorema de divergencia puede ser aplicado a los vectores $\varphi\nabla\psi$ y $\psi\nabla\varphi$ en la región infinita V_∞ al más allá de S; entonces $\mathbf{n}$ es normal unitario externo a V_∞ y apunta hacia el interior de S.

Notando que $1/r$ es regular en el infinito, concluimos que las identidades de Green (1), (2), (3), (4) son válidas en V_∞. Puede demostrarse que (3) y (4) son válidas aún en el caso de que $\nabla^2\varphi$ sea continua en el *interior* de la región pero no necesariamente en sus límites S, siempre y cuando la integral $\int_J^\infty r^{-1}\nabla^2\varphi dV$ sea convergente. ‡

Supongamos ahora que φ es regular en el infinito y que $\nabla^2\varphi$ es continua en todo el espacio excepto en P. Entonces, si aplicamos (3) a la región V_∞ al más allá de S y suponemos que S se contrae hasta el punto P, obtenemos

$$(6) \qquad \varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_\infty \frac{\nabla^2\varphi}{r}\,dV \qquad \text{(en todo el espacio)},$$

siempre y cuando la integral sea convergente.

PROBLEMAS

1. Verificar (3) encontrando $\varphi(0)$ cuando $\varphi(r) = ar^2 + br + c$ y S es la esfera $r = 1$.

2. Verificar (6) encontrando $\varphi(0)$ cuando

$$\varphi(r) = 3 - 3\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2} \quad (r < a) \qquad \varphi(r) = \frac{a}{r} \quad (r \geq a).$$

¿Es $\nabla^2\varphi$ continua en $r = 0$? ¿Y en $r = a$?

3. Verificar (6) encontrando $\varphi(0)$ cuando $\varphi(r) = 1/(a + r)$.

$$[\nabla^2\varphi = -2a/r(r + a)^3, \text{ (42.21)}.]$$

---

† *Advanced Calculus*, p. 129.

‡ Cf. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Berlín, 1929, pp. 119-219.

4. $\varphi(r)$, $\nabla\varphi$ y $\nabla^2\varphi$ son continuas siempre, excepto cuando $\nabla^2\varphi \to \infty$ medida que $r \to 0$. Demostrar que la integral de volumen en (6) converge a $-4\pi\varphi(0)$, dado que φ sea regular en el infinito.

$$\left[\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2\varphi'(r)] \text{ de } (42.21).\right]$$

56. Funciones armónicas. Una solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ se llama *función armónica*. La función φ se dice *armónica en un punto P* si sus segundas derivadas son continuas en alguna vecindad de P y satisface la ecuación de Laplace. Si φ es armónica en todos los puntos interiores de una región y continua en toda la región, se llama *armónica en la región*. En una región *abierta*, todos los puntos son interiores y la continuidad de φ se deduce de la continuidad de sus derivadas. Para una región *cerrada*, los valores de φ en el interior deben conectar continuamente con sus valores de límite.

En las identidades de Green podemos suponer ahora que φ es armónica en la región V limitada por una superficie cerrada S.

Si hacemos $\psi = \varphi$ en (55.1), tenemos

$$(1) \qquad \int_V |\nabla\varphi|^2\, dV = \oint_S \varphi \frac{d\varphi}{dn}\, dS.$$

Consecuentemente, si,

$$(a)\ \varphi = 0 \quad \text{o} \quad (b)\ \frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \text{en } S,$$

la integral de volumen es nula. Puesto que $|\nabla\varphi|$ es *continua* y jamás negativa, $\nabla\varphi = 0$ en todo V; puesto que, si $|\nabla\varphi|$ fuera positiva en un punto P, podríamos acomodar a P en una subregión V' de V en la que $|\nabla\varphi| > 0$ y la integral de $|\nabla\varphi|^2$ sobre V' y por lo tanto sobre V, sería positiva. Así, en ambos casos (a) y (b),

$$\nabla\varphi = 0 \quad \text{y} \quad \varphi = \text{constante en } V.$$

En particular, $\varphi = 0$ en el caso (a).

Sean ahora φ_1 y φ_2 dos funciones armónicas en V que tengan los mismos valores en S; entonces $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ es armónica en V y cero en S; consecuentemente, $\varphi = 0$ o $\varphi_1 = \varphi_2$ en V. Hemos así demostrado el

TEOREMA 1. *Una función que es armónica en una región cerrada limitada por una superficie S está completamente determinada por sus valores en el límite.*

Si φ y ψ son ambas armónicas en la región V, la integral de volumen en (55.2) es nula, y tenemos

$$\oint_S \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) dS = 0. \tag{2}$$

En particular, si $\psi = 1$, (2) se convierte en

$$\oint_S \frac{d\varphi}{dn}\, dS = 0. \tag{3}$$

TEOREMA 2. *Si una función es armónica en una región cerrada limitada por una superficie S, la integral de su derivada normal sobre S es nula.*

Esta propiedad es característica de las funciones armónicas, puesto que puede demostrarse que, si (3) es válida para todas las esferas en una región V, φ es armónica en V. †

Finalmente, si ponemos $\nabla^2\varphi = 0$ en (55.3-4), obtenemos el importante

TEOREMA 3. *Si φ es armónica en una región cerrada V acotada por una superficie S y r es la distancia desde un punto P,*

$$4\pi\,\varphi(P) = \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, \quad P \text{ en el interior de } V; \tag{4}$$

$$0 = \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, \quad P \text{ en el exterior de } V. \tag{5}$$

Obsérvese que (4) da el valor de una función armónica en cualquier punto P de una región cerrada en términos de los valores de φ y de $d\varphi/dn$ en su borde. Así, el integrando de (4) es una función, digamos $F(x, y, z)$ de las coordenadas de P (que entran en $1/r$ y en su derivada normal). *Ahora*, puede demostrarse que la integral puede ser derivada bajo el signo de integral y, puesto que $F(x, y, z)$ admite derivadas de todos los órdenes, lo mismo es válido para la integral y para $\varphi(P)$. Así, $\varphi(P)$ es una función $\varphi(x, y, z)$ que admite

† Cf. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Berlín, 1929, p. 227.

derivadas de todos los órdenes y, puesto que la existencia de todas las derivadas de orden n implica la continuidad de todas las derivadas de orden $n-1$, $\varphi(P)$ tiene derivadas *continuas* de todos los órdenes. Este notable resultado surge de una mera condición $\nabla^2\varphi = 0$ en las *segundas* derivadas de φ.

Hemos visto que (4) da $\varphi(P)$ en términos de los valores de límite de φ y de $d\varphi/dn$. Pero, puesto que φ está unívocamente determinada por sus valores de límite solamente (Teorema 1), podemos esperar encontrar una fórmula que dé a φ dentro de S en términos de sus valores de límite continuos en S. Este problema más difícil fue resuelto por Green usando una función (ahora conocida como *función de Green*) que definió como un potencial debido a ciertas cargas eléctricas. El tratamiento puramente matemático de este asunto se conoce como el

PROBLEMA DE DIRICHLET. *¿Existe una función armónica φ en una región cerrada limitada por una superficie S que tome un conjunto de valores continuos en el límite?*

La respuesta a este famoso problema es, *sí*, para superficies de un tipo muy general, pero se ha demostrado que hay algunas superficies para las cuales no existe solución.

Si aplicamos (4) a una esfera Σ de radio r con centro en P,

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}.$$

Puesto que r es constante sobre Σ, la primera integral en (4) se anula en virtud de (3) y obtenemos

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi r^2}\oint_{\Sigma} \varphi\, dS. \tag{6}$$

Puesto que el área de la superficie de Σ es $4\pi r^2$, (6) expresa el teorema de los valores medios de Gauss:

TEOREMA 4. *Si una función es armónica en una esfera, su valor en el centro es la media aritmética de sus valores en la superficie.*

Esta propiedad demuestra también ser característica de las funciones armónicas. † Partiendo de este teorema es fácil demostrar el

† Cf. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, p. 224-227.

TEOREMA 5. *Una función que es armónica, pero no constante, alcanza en una región cerrada sus valores extremos solamente en los límites.*

Demostración. Si φ es armónica en una región cerrada V, debe tomar sus valores extremos en V, en virtud de su continuidad. † Consideremos el conjunto de los puntos para los cuales $\varphi = M$, su valor máximo. Puesto que φ no es constante, este conjunto no puede contener a *todos* los puntos interiores. Más aún, el conjunto no puede contener a ningún punto interior, puesto que, si lo hiciera así, debería tener un punto de frontera P en el interior de V. Habría entonces una esfera con centro en P contenida completamente en V y que pasara por algunos puntos en donde $\varphi < M$. La media de sus valores en la superficie no podría ser entonces $\varphi(P) = M$, como se requiere por el teorema de Gauss.

Las fórmulas (1), (2), (4), (5) son válidas también para funciones que son armónicas en la región infinita compuesta por una superficie cerrada y todo el espacio exterior a ella, siempre y cuando φ y ψ sean regulares en el infinito, puesto que las identidades de Green, de las cuales se derivan, son válidas para regiones infinitas (§55).

La fórmula (3), sin embargo, no es, *en general*, cierta. Puesto que se derivó de (2) haciendo $\psi = 1$, que no es regular en el infinito, se puede ver lo anterior. De hecho, (3) es falsa cuando $\varphi = 1/r$, donde r es la distancia desde un punto interior a S; aun cuando $1/r$ es armónica al exterior de S y regular en el infinito, tenemos, de (52.9)

$$(7)\qquad \oint_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -4\pi, \quad \mathbf{n} \text{ externa a } S.$$

Podemos, sin embargo, demostrar el

TEOREMA 6. *Si φ es armónica en la región cerrada entre las superficies cerradas S_1 y S_2 (que rodean a S_1), entonces*

$$(8)\qquad \oint_{S_1} \frac{d\varphi}{dn_1}\, dS = \oint_{S_2} \frac{d\varphi}{dn_2}\, dS.$$

donde $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ apuntan desde el interior hacia el exterior de las superficies.

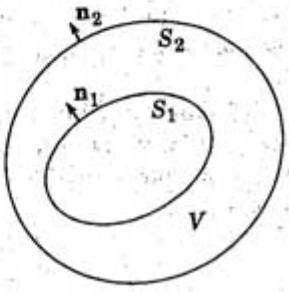


Fig. 56*a*. Región entre superficies cerradas.

† Cf. *Advanced Calculus*, p. 152, Teorema 4.

Demostración. Apliquemos el teorema de divergencia al vector $\nabla\varphi$ en la región cerrada V entre S_1 y S_2. Entonces, puesto que $-\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son normales externas a la región V (Fig. 56*a*).

$$0 = \int_V \operatorname{div} \nabla\varphi \, dV = -\oint_{S_1} \frac{d\varphi}{dn_1} \, dS + \oint_{S_2} \frac{d\varphi}{dn_2} \, dS.$$

Así, queda demostrado (8).

Ejemplo 1. Si aplicamos (4) y (5) a la función armónica $\varphi = 1$, obtenemos

$$(9) \qquad \left.\begin{matrix} 4\pi \\ 0 \end{matrix}\right\} = -\oint_S \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \qquad \begin{matrix} P \text{ interior a } S, \\ P \text{ exterior a } S. \end{matrix}$$

de acuerdo con (52.9).

Ejemplo 2. Si P es cualquier punto dentro de una esfera Σ de radio a y centro O, y r es la distancia desde P,

$$(10) \qquad \oint_\Sigma \frac{1}{r} \, dS = 4\pi a$$

Si R es la distancia desde O (Fig. 56*b*), las funciones $\varphi = 1/r$ y $\psi = 1/R$ son armónicas al exterior de Σ y regulares en el infinito. En consecuencia, de (2)

$$\oint_\Sigma \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS = 0.$$

Si $\mathbf{n}$ denota la normal externa a Σ, esto da, puesto que $R = a$ sobre Σ,

$$-\frac{1}{a^2}\oint_\Sigma \frac{1}{r} \, dS = \frac{1}{a}\oint_\Sigma \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\frac{4\pi}{a}$$

por (7). Así, (10) queda demostrado, también establece que la media de $1/r$ sobre Σ es $1/a$.

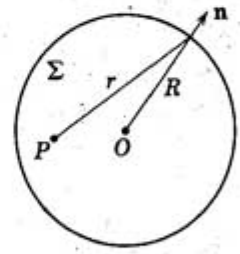


Fig. 56*b*. Región con límite esférico.

Ejemplo 3. Si r_1 y r_2 denotan las distancias desde P_1 y P_2, las funciones $1/r_1$ y $1/r_2$ son armónicas dondequiera excepto en P_1 y P_2, respectivamente. Considérese la integral sobre cualquier superficie cerrada S:

$$I = \oint_S \left[\frac{1}{r_1}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_2}\right) - \frac{1}{r_2}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right] dS.$$

Si P_1 y P_2 están al exterior de S, $1/r_1$ y $1/r_2$ son armónicas en el interior de S y además $I = 0$, por (2). Si P_1 y P_2 están en el interior de S, $1/r_1$ y $1/r_2$ son armónicas al exterior de S y regulares en el infi-

nito; de nuevo $I = 0$. Pero si P_1 está en el interior de S y P_2 al exterior, $1/r_2$ es armónica adentro de S y, haciendo $r = r_1$, $\varphi = 1/r_2$ en (4),

$$I = 4\pi \left(\frac{1}{r_2}\right)_{P_1} = \frac{4\pi}{P_1P_2}.$$

PROBLEMAS

1. Si φ es armónica en una región cerrada V limitada por una superficie S y $\varphi = C$ en S, demostrar que $\varphi = C$ en toda V.

2. Si φ y ψ son funciones armónicas en una región cerrada V limitada por una superficie S, y además $d\varphi/dn = d\psi/dn$ sobre S, demostrar que $\psi = \varphi +$ const. en toda V.

3. Si φ y $f(\varphi)$ son ambas armónicas en una región V y φ no es constante, demostrar que

$$f(\varphi) = a + b\varphi.$$

$$[\nabla f(\varphi) = f'(\varphi)\nabla\varphi,\ \nabla^2 f(\varphi) = f''(\varphi)\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi + f'(\varphi)\nabla^2\varphi.]$$

4. Demostrar que, si φ es armónica en todo el espacio y regular en el infinito, entonces $\varphi = 0$.

[Aplicar (1) cuando V es la región dentro de una esfera Σ con centro en O y de radio r. Demostrar que la integral de superficie $\to 0$, $r \to \infty$.]

57. Revisión. Al calcular la derivada de una función escalar de punto $f(\mathbf{r})$ en la dirección de $\mathbf{e}$, encontramos que una sola función vectorial de punto ∇f, llamada *gradiente de* f, combina todas las derivadas direccionales df/ds en un punto en una sola fórmula, de acuerdo con

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{e}\cdot\nabla f.$$

En esta expresión, el vector unitario $\mathbf{e}$ da la *dirección*, mientras que ∇f depende solamente del *punto* donde se calculan las derivadas. Así, un solo vector ∇f nos permite combinar un número infinito de escalares. Sin embargo, el gradiente ∇f es una cantidad más compleja que un simple escalar; están, en efecto, definidos por tres números, sus componentes. Así, las tres componentes de ∇f nos permiten combinar una infinidad de escalares df/ds en una sola expresión. A fin de simplificar la derivación direccional en el espacio de *tres* dimensiones, hemos sido conducidos desde escalares (con $3^0 = 1$ componente), hasta vectores (con $3^1 = 3$ componentes). Técnicamente hablando, hemos avanzado desde *tensores de valencia cero a tensores de valencia 1.*

Pasando en seguida a la derivación direccional de funciones vectoriales de punto, $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ obtenemos la fórmula

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{e} \cdot \nabla \mathbf{f}$$

de la misma forma que la anterior. Otra vez aquí el vector $\mathbf{e}$ da la dirección, mientras que $\nabla \mathbf{f}$ el *gradiente de* $\mathbf{f}$, depende solamente del punto donde se calculen las derivadas. La expresión que lleva en sí un número infinito de derivadas vectoriales $d\mathbf{f}/ds$ es una nueva clase de cantidad que llamaremos una *diádica*. En forma de una matriz 3×3, puede ser representada completamente por nueve números. Continuando nuestro esfuerzo para simplificar y comprender la derivación direccional de vectores en el espacio de tres dimensiones, hemos sido llevados desde vectores (con $3^1 = 3$ componentes), hasta diádicas (con $3^2 = 9$ componentes). Hemos avanzado, de nuevo, desde *tensores de valencia 1 a tensores de valencia 2*. La valencia más alta es el precio que pagamos por la concisión y la mejor comprensión de las implicaciones que traen consigo.

A fin de derivar una diádica direccionalmente, debemos introducir una *triádica*, un tensor de valencia tres, con $3^3 = 27$ componentes. Pero los tensores de valencia superior no nos conciernen, aunque son indispensables para formular ciertas partes de la geometría y de la física matemática —especialmente la teoría de la relatividad, que es a la vez geometría y física.

La propiedad básica de los tensores es la ley para cambiar sus componentes cuando se cambia el sistema de coordenadas. Así, un vector $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$ tiene diferentes componentes en cada sistema de coordenadas rectangulares y la relación que conecta las componentes en sistemas coordenados diferentes es, de hecho, el carácter esencial de un vector. Lo mismo vale para tensores de valencia superior, tales como diádicas y triádicas. En todos estos cambios, sin embargo, hay ciertas funciones de las componentes que no cambian; éstas son las *invariantes* de un tensor. Para un vector

$$\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

es una invariante. Para una diádica,

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i = f_{11}\mathbf{ii} + f_{12}\mathbf{ij} + \cdots + f_{33}\mathbf{kk},$$

las dos invariantes más importantes son la escalar

$$F_s = \sum \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i = f_{11} + f_{22} + f_{33}$$

y la vectorial

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i = (f_{23} - f_{32})\mathbf{i} + (f_{31} - f_{13})\mathbf{j} + (f_{12} - f_{21})\mathbf{k}.$$

Puesto que las invariantes de tensores son independientes del sistema de coordenadas empleado, los teoremas de la geometría y las leyes de la física se expresan en términos de invariantes. Esta es la razón por la que se estudian. Es la clave de su importancia.

El gradiente de un vector $\mathbf{f}$, es decir la diádica

$$\text{grad } \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f} = \mathbf{i}\,\mathbf{f}_x + \mathbf{j}\,\mathbf{f}_y + \mathbf{k}\,\mathbf{f}_z,$$

tiene las invariantes escalar y vectorial

$$\text{div } \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{f}_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_z,$$

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{i} \times \mathbf{f}_x + \mathbf{j} \times \mathbf{f}_y + \mathbf{k} \times \mathbf{f}_z.$$

Estas aparecen constantemente en todas las ramas de la *teoría del campo;* campos de fuerza, velocidades en el flujo de flúidos y el campo electromagnético. En los siguientes capítulos estudiaremos tales campos.

Pero aún en la geometría, la divergencia y el rotacional son de la mayor importancia. Las transformaciones básicas de integrales involucran los gradientes de tensores y son válidas para tensores de cualquier valencia. †

$$(A) \qquad \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{f}\, ds = \mathbf{f}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_1);$$

$$(B) \qquad \int \mathbf{n} \times \nabla \mathbf{f}\, dS = \oint \mathbf{T}\,\mathbf{f}\, ds;$$

$$(C) \qquad \int \nabla \mathbf{f}\, dV \quad = \oint \mathbf{n}\,\mathbf{f}\, dS.$$

Cada una transforma a una integral sobre una región en una integral sobre sus límites. El prototipo de todas esas transformaciones es el *teorema fundamental del cálculo* dado en (A) en forma generalizada.

† Cf. *Vector and Tensor Analysis,* Capítulo 6.

De estas transformaciones pueden deducirse otras multiplicando entre sí escalar y vectorialmente las funciones tensoriales, puesto que ambas operaciones son distributivas con respecto a la adición y por lo tanto pueden efectuarse bajo el signo de integral.

Cuando $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es un vector, las integrales en (B) y en (C) involucran diádicas. A partir de ellas, multiplicando escalarmente los vectores díadas, obtenemos el *teorema de Stokes:*

$$(B\cdot) \qquad \int \mathbf{n}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{f}\, dS = \oint \mathbf{T}\cdot\mathbf{f}\, ds,$$

y el *teorema de divergencia*

$$(C\cdot) \qquad \int \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV = \oint \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\, dS.$$

De $(B\cdot)$ se ve que para todas las curvas cerradas en una región simplemente conexa V,

$$\oint \mathbf{T}\cdot\mathbf{f}\, ds = 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{rot}\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad V;$$

puesto que, si V es simplemente conexa, una superficie que esté contenida completamente en V puede ser desarrollable sobre la curva. *La circulación de un vector irrotacional sobre cualquier curva cerrada en una región simplemente conexa es nula.*

De $(C\cdot)$ se ve que

$$\oint \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\, dS = 0 \quad \text{if} \quad \operatorname{div}\mathbf{f} = 0 \quad \text{dentro de } S.$$

El flujo normal de un vector solenoidal sobre cualquier superficie cerrada es nulo.

Multiplicando vectorialmente los vectores díadas, obtenemos teoremas menos famosos, pero aún importantes:

$$(B\times) \qquad \int \{(\nabla\mathbf{f})\cdot\mathbf{n} - \mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{f}\}\, dS = \oint \mathbf{T}\times\mathbf{f}\, ds;$$

$$(C\times) \qquad \int \operatorname{rot}\mathbf{f}\, dV = \oint \mathbf{n}\times\mathbf{f}\, dS.$$

Sabemos que div f y rot f son independientes del sistema de referencia y expresan propiedades invariantes del vector de campo f. Pero, ¿qué representan? ¿Pueden hacerse tangibles estas expresiones? La respuesta es *sí;* el teorema de divergen-

cia y el teorema de Stokes dan a la divergencia y a la rotación el siguiente significado.

Si V es el volumen de una pequeña esfera con centro en un punto P, tenemos de $(C\cdot)$ y del teorema del valor medio para integrales de volumen,

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{f}} = \frac{\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS}{V},$$

donde div $\mathbf{f}$ se calcula en algún punto P dentro de la esfera. Entonces,

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}\, dS}{V};$$

Así, puede decirse que div $\mathbf{f}$ es una *densidad de flujo:*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \textit{flujo normal de } \mathbf{f} \textit{ por unidad de volumen}$$

a través de una esfera pequeña alrededor de P.

En cuanto a rot $\mathbf{f}$, considérese su componente $\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f}$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{e}$. Trácese un pequeño círculo de área A y centro en P en un plano normal a $\mathbf{e}$; entonces, de $(B\cdot)$ y del teorema del valor medio para integrales de superficie,

$$\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{f}} = \frac{\oint \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}\, ds}{A},$$

donde rot $\mathbf{f}$ se calcula en algún punto P dentro del círculo. Entonces

$$\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} = \lim_{A \to 0} \frac{\oint \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}\, ds}{A}.$$

De nuevo, puede decirse que $\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f}$ es una *densidad de circulación:*

$$\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} = \textit{circulación de } \mathbf{f} \textit{ por unidad de área}$$

sobre un pequeño círculo con centro en P y en un plano normal a $\mathbf{e}$. El *sentido* de la circulación es el de un tornillo con rosca derecha que avanza en la dirección de $\mathbf{e}$. El vector rot $\mathbf{f}$

representa una síntesis de todas las densidades de circulación en un punto dado.

Tenemos ahora una sinopsis de los motivos, métodos y resultados en el análisis vectorial y tensorial. El estudiante que los recuerde está en posición de poder entender la geometría y la física matemática no simplemente como un conjunto de fórmulas sino como una rica diversidad de resultados que fluyen de unos cuantos principios centrales.

Capítulo 6

Dinámica

58. Dinámica de la partícula. Si en un problema determinado de dinámica, la materia que compone a un cuerpo puede tomarse como concentrada en un solo punto, se dice que el cuerpo es una *partícula*. Así, el movimiento de la tierra alrededor del sol puede determinarse con bastante exactitud tratando al sol y a la tierra como partículas. Pero una bola de billar, cuyo movimiento incluye el rodamiento, el resbalamiento y el spin (del inglés), ciertamente no puede ser considerada como una partícula. En resumen, para conocer cuando un cuerpo puede ser tratado como una partícula, debe tomarse en cuenta la naturaleza del problema y el grado de exactitud que debe alcanzarse. Hace falta, pues, tener un juicio claro para poder determinarlo.

Sin embargo, si los cuerpos de que se trata pueden ser tratados como partículas, el movimiento que en ellos provoca la acción de las fuerzas puede ser determinado a partir de tres principios fundamentales.

I. Fuerza y Aceleración. *Una partícula libre adquiere una aceleración* $\mathbf{a}$ *en la dirección de una fuerza* $\mathbf{f}$ *que actúe sobre ella; esto es,*

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

donde m es un escalar constante cuyo valor (para un sistema dado de unidades), depende enteramente de la naturaleza del cuerpo designado como partícula.

II. Adición Vectorial de Fuerzas. *Un sistema de fuerzas actuando simultáneamente sobre la misma partícula puede ser reemplazado por una sola fuerza que actúe sobre dicha partícula y que sea igual a la suma vectorial de las anteriores.*

III. Acción y Reacción. *La interacción entre dos partículas, ya sea en contacto directo o a distancia, puede ser representada por dos fuerzas de igual magnitud y de dirección opuesta actuando sobre la línea que las une.*

La ecuación (1) es la *ecuación fundamental de la dinámica.* Es la *segunda ley del movimiento* de Newton.

Cuando no existe ninguna fuerza que actúe sobre la partícula, o cuando todas las fuerzas tienen suma nula, la ecuación fundamental se convierte en (§32)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Si las condiciones iniciales son

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0,$$

la integración de (2) nos da $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, o

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0. \tag{3}$$

Integrando de nuevo, tenemos

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0, \tag{4}$$

que es la ecuación de un *rayo* que parte de $\mathbf{r}_0$ en la dirección de $\mathbf{v}_0$. Si $\mathbf{v}_0 = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ y el cuerpo permanecerá en reposo; de otra manera se moverá en línea recta con velocidad constante. Estos resultados constituyen la

Ley de Inercia. *Una partícula permanecerá en su estado de reposo o de movimiento uniforme en una línea recta a menos que actúe sobre ella una fuerza no equilibrada.*

Galileo fue el primero en darse cuenta de esta ley fundamental. Fue establecida en la forma de arriba por Newton en su *primera ley del movimiento.*

59. Ecuaciones del movimiento. El problema central en la dinámica de una partícula es la solución de la ecuación vectorial diferencial de segundo orden

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f} \tag{1}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0. \tag{2}$$

En algunos problemas, tales como el movimiento de un planeta alrededor del sol, podemos resolver esta ecuación directamente (§61). Sin embargo, frecuentemente es necesario reemplazarla por una, dos o tres ecuaciones escalares, de acuerdo con que el movimiento esté en una recta, en un plano o en el espacio de tres dimensiones. Para este propósito descomponemos la aceleración y la fuerza en sus componentes e igualamos las componentes análogas en la ecuación (1). Las componentes rectangulares de la aceleración están dadas en (32.7) y las componentes polares planas en (32.9).

Si una partícula P se mueve en línea recta, escojemos a ésta como el eje de las x, escogiendo un origen y una dirección positiva (**i**) arbitrariamente. La posición, velocidad y aceleración de P, así como la fuerza que actúa sobre ella, están dados por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}, \qquad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}, \qquad \mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}, \qquad \mathbf{f} = f\mathbf{i};$$

y (1) es equivalente a la ecuación escalar $m\ddot{x} = f$. † Las *direcciones* de **r**, **v**, **a** y **f** están dadas por los signos x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, y f; y llamamos a los *números con signo*

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}, \tag{3}$$

velocidad y aceleración. El número positivo $|v|$ se llama velocidad abstracta (*speed* en lengua inglesa).

En muchos problemas, la solución de $m\ddot{x} = f$ puede lograrse mediante la resolución de dos ecuaciones de primer orden.

Cuando f es una función de t o de v, resolvemos

$$m\frac{dv}{dt} = f, \qquad \frac{dx}{dt} = v, \tag{4}$$

a fin de encontrar a v y a x como funciones de t. Eliminando a t de estas ecuaciones, obtenemos una relación entre x y v.

Cuando f es una función de x o de v, resolvemos

$$mv\frac{dv}{dx} = f, \qquad \frac{dx}{dt} = v, \tag{5}$$

a fin de encontrar a v como una función de x y a x como función de t.

† Los puntos indican derivadas con respecto al tiempo. (Notación de Newton.)

Ejemplo 1. Caída libre de un cuerpo. Para una caída libre desde el reposo por la acción de la gravedad tomamos el origen como punto inicial, siendo el eje x vertical. La fuerza de la gravedad es $mg\mathbf{i}$ y nuestra ecuación diferencial es

$$\frac{dv}{dt} = g \quad \text{o} \quad v\frac{dv}{dx} = g.$$

Resolviéndolas con las condiciones iniciales $x = 0$, $v = 0$ cuando $t = 0$, encontramos que

$$(6) \qquad v = gt, \qquad x = \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad v^2 = 2gx.$$

Para la caída en la que la resistencia del aire es proporcional a v^2 ponemos $f = m(g - kv^2)$, donde $k > 0$. La ecuación del movimiento es ahora

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \quad \text{o} \quad v\frac{dv}{dx} = g - kv^2.$$

Si el cuerpo cae desde un punto suficientemente alto, v aumentará hasta que $g - kv^2 = 0$; entonces $dv/dt = 0$, y desde ese momento el cuerpo viajará con una *velocidad terminal* V constante. Así, $g - kV^2 = 0$ y $k = g/V^2$; entonces nuestra ecuación del movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) \quad \text{o} \quad v\frac{dv}{dx} = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right).$$

De ésta encontramos que

$$(7) \qquad v = V\tanh\frac{gt}{V}, \qquad x = \frac{V^2}{g}\log\cosh\frac{gt}{V}, \qquad v^2 = V^2\left(1 - \exp\frac{-2gx}{V^2}.\right)$$

A medida que $V \to \infty$, los miembros del lado derecho se acercan a los valores dados en (6). Úsese la regla de l'Hospital para demostrar esto.

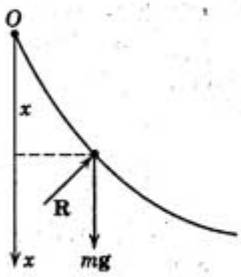


Fig. 59. Partícula deslizándose sobre una curva.

Ejemplo 2. Una partícula se desliza desde el reposo hacia abajo sobre una curva continua cóncava (Fig. 59) bajo la influencia de la gravedad. La ecuación del movimiento es

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R},$$

donde $\mathbf{R}$ es la reacción normal de la curva. Tomando las componentes tangencial y normal, tenemos

$$(8)\,(9) \qquad \frac{dv}{dt} = \mathbf{g}\cdot\mathbf{T}, \qquad m\frac{v^2}{\rho} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{N} = R \quad (32.5),$$

puesto que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right), \qquad \mathbf{g}\cdot\mathbf{T} = \frac{d}{ds}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}),$$

(8) admite la integral

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \mathbf{g}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = gx \quad \text{o} \quad v^2 = 2gx,$$

donde x es la distancia vertical recorrida; $R = 2mgx/\rho$, de (9).

PROBLEMAS

1. Si un cuerpo cae desde el reposo por la acción de la gravedad con resistencia del aire proporcional a v, demostrar que la ecuación del movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{v}{V}\right), \qquad V = \text{velocidad terminal},$$

y que

$$v = V(1-e^{-gt/V}), \qquad x = Vt - \frac{V^2}{g}(1-e^{-gt/V}), \qquad x = \frac{V^2}{g}\log\frac{V}{V-v} - \frac{vV}{g}.$$

2. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0. Si la resistencia del aire por masa unitaria es kv^2, demostrar que el cuerpo subirá hasta la altura

$$h = \frac{1}{2k}\log\left(1+\frac{kv_0^2}{g}\right)$$

y que llegará a la tierra de nuevo con una velocidad

$$V = v_0\left(1+\frac{kv_0^2}{g}\right)^{-1/2}$$

Comprobar con respecto a las dimensiones.

3. Un proyectil tiene como ecuación del movimiento a $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{g}$ cuando se desprecia la resistencia del aire. Si se lanza desde el origen con $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i}v_0\cos\alpha + \mathbf{j}v_0\operatorname{sen}\alpha$, demostrar que describe una parábola

$$x = v_0 t\cos\alpha, \qquad y = v_0 t\operatorname{sen}\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

y que su altura máxima y su recorrido horizontal son

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\alpha, \qquad R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\alpha.$$

4. Un cuerpo es atraído hacia el origen con una fuerza $-k^2\mathbf{r}$ por unidad de masa. Demuestre que su ecuación del movimiento

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + k^2\mathbf{r} = 0$$

tiene la solución

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\cos kt + \frac{\mathbf{v}_0}{k}\operatorname{sen}kt.$$

Si $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{j}$, demostrar que la partícula describe una elipse

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1 \quad \text{con período} \quad \frac{2\pi}{k}.$$

5. Un cuerpo es repelido del origen con una fuerza $k^2\mathbf{r}$ por unidad de masa. Demostrar que su ecuación del movimiento

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - k^2\mathbf{r} = 0$$

tiene la solución

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cosh kt + \frac{\mathbf{v}_0}{k} \operatorname{senh} kt.$$

Si $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{j}$, demostrar que la órbita es una hipérbola

$$\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1.$$

6. Si la fuerza por unidad de masa es $-k\mathbf{v}$, demostrar que la ecuación de movimiento

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + k\mathbf{v} = 0$$

admite el factor de integración e^{kt}. En consecuencia, deducir la solución

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-kt}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{v}_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

7. Un cuerpo que cae está sujeto a la resistencia del aire $-k\mathbf{v}$ por unidad de masa. Demostrar que su ecuación del movimiento

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + k\mathbf{v} = \mathbf{g}$$

admite el factor de integración e^{kt} y dedúzcase la solución

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{g}}{k} + \left(\mathbf{v}_0 - \frac{\mathbf{g}}{k}\right) e^{-kt},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{g}}{k}t + \left(\mathbf{v}_0 - \frac{\mathbf{g}}{k}\right)\frac{1 - e^{-kt}}{k}.$$

Encontrar las dimensiones de k y compruébese.

8. Si la fuerza sobre una partícula de masa m es $\mathbf{c} \times \mathbf{v}$(**c** constante), demostrar que

(*a*) la velocidad abstracta v es constante;

(*b*) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = cv \cos \alpha$ es constante;

(*c*) la aceleración es $\kappa v^2\mathbf{N}$;

(*d*) si $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, la órbita es una hélice circular cuya curvatura y torsión son $\kappa = (c/mv) \operatorname{sen} \alpha$, $\tau = (c/mv) \cos \alpha$;

(*e*) Si $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$, la órbita es un círculo de radio $\rho = mv/c$.

9. La ecuación del movimiento de una partícula es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2a\frac{d\mathbf{r}}{dt} + b^2\mathbf{r} = 0,$$

donde a y b son constantes reales. Demostrar que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{C}\, e^{-2at} \qquad (\mathbf{C} = \text{const}),$$

y deducir a partir de esto que la órbita es una curva *plana*. Demostrar que, si $\gamma = \sqrt{|a^2 - b^2|}$,

$$\mathbf{r} = e^{-at}(\mathbf{A}\cosh \gamma t + \mathbf{B}\operatorname{senh} \gamma t) \quad \text{cuando} \quad a > b,$$

$$\mathbf{r} = e^{-at}(\mathbf{A} + \mathbf{B}t) \quad \text{cuando} \quad a = b,$$

$$\mathbf{r} = e^{-at}(\mathbf{A}\cos \gamma t + \mathbf{B}\operatorname{sen} \gamma t) \quad \text{cuando} \quad a < b,$$

donde **A** y **B** son vectores constantes determinados por las condiciones iniciales: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, cuando $t = 0$. ¿Cuáles son las dimensiones de a y b?

10. La ecuación del movimiento de una partícula es $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$ donde **S** es una diádica simétrica constante. Si $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ cuando $t = 0$, demostrar que

$$v^2 - v_0^2 = \mathbf{r} : \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}.$$

60. Trabajo y energía. Si las fuerzas que actúan sobre una partícula tienen a **f** como resultante, la ecuación del movimiento es

$$\mathbf{f} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros por **v** se obtiene

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = m\,\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right); \tag{1}$$

e integrando esta ecuación entre t_0 y t, obtenemos

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dt = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{2}$$

Al escalar $\frac{1}{2}mv^2$ se le llama *energía cinética* de la partícula. Si tomamos a **f** como función de t, la integral

$$W = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dt = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt \tag{3}$$

se llama el *trabajo* realizado por la fuerza en el intervalo de tiempo. La ecuación (2) establece el

PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA. *La variación de la energía cinética de una partícula en un intervalo de tiempo es igual al trabajo total efectuado por las fuerzas que actúan sobre ella durante ese intervalo de tiempo.*

La ecuación

Variación de la energía cinética = trabajo efectuado

se llama *ecuación de la energía*.

En muchos casos la fuerza $\mathbf{f}$ es conocida, cuando la posición de la partícula es dada. Entonces $\mathbf{f}$ es una función vectorial de punto $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ y hablamos de un *campo de fuerza*. Entonces, el trabajo puede calcularse como una integral de línea sobre la curva C, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, recorrida por la partícula. En general el trabajo depende de la trayectoria C entre $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$; pero si rot $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ en una región simplemente conexa $\mathscr{R}$, $\mathbf{f}$ es el gradiente de una función escalar de punto $-\varphi(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{f} = -\nabla\varphi \tag{4}$$ (45.8)

y el trabajo

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\varphi = \varphi(\mathbf{r}_0) - \varphi(\mathbf{r}) \tag{5}$$

es independiente de la trayectoria. Por lo tanto, de (2)

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + \varphi(\mathbf{r}_0);$$

esto es,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \varphi(\mathbf{r}) = \text{constante} \tag{6}$$

en todos los puntos de la región $\mathscr{R}$.

Decimos ahora que la fuerza $\mathbf{f}$ se deriva del potencial φ, o que la partícula tiene la *energía potencial* φ en el campo de fuerza $\mathbf{f}$. Así, el miembro izquierdo en (6) es la suma de dos energías, la cinética y la potencial; la primera se debe al *movimiento* de la partícula y la segunda a la *posición*. El signo menos en (4) se introdujo de tal manera que las energías se sumen en el miembro izquierdo de (6). Esta ecuación es un ejemplo especial de la

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA. *Cuando un campo de fuerza tiene una función potencial, la suma de las energías cinética y potencial de una partícula que se mueve en ese campo es constante.*

Un campo de fuerza que tenga una función de potencial se llama *conservativo* porque la energía total, cinética más potencial, se conserva. Si la función $\varphi(\mathbf{r})$ satisface a (4), todas las funciones $\varphi(\mathbf{r})$ + constante lo hacen. La constante aditiva se determina generalmente, de una vez para todas, prescribiendo el valor de $\varphi(\mathbf{r})$ en algún punto $\mathbf{r}_0$, por ejemplo $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$.

Ejemplo 1. El campo localizado de la tierra. En la vecindad de de una localidad dada, la tierra atrae a una partícula de masa m con la fuerza

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k} = -mg\,\nabla z, \tag{7}$$

donde $\mathbf{g}$ es la aceleración local de la gravedad y $\mathbf{k} = \nabla z$ es el vector unitario vertical dirigido hacia arriba (37.9). Para una partícula que esté a una distancia z arriba de la tierra tenemos

$$\mathbf{f} = -\nabla(mgz), \qquad \varphi = mgz. \tag{8}$$

Así, el campo de la tierra es conservativo teniendo el potencial $\varphi = mgz$. Una partícula que se mueve en el campo local de la tierra tiene la energía total constante

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgz = c. \tag{9}$$

Así, si una partícula se lanza con velocidad inicial v_0 a la altura $z = h$, caerá a la tierra con una velocidad V dada por

$$\tfrac{1}{2}mV^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh, \qquad V^2 = v_0^2 + 2gh. \tag{10}$$

Ejemplo 2. El campo del sol. El sol, de masa M, atrae a una partícula de masa m con la fuerza

$$\mathbf{f} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}; \tag{11}$$

r es la distancia radial de m al centro del sol, $\mathbf{r}/r$ es un vector unitario radial y γ la constante de gravitación. Puesto que $\mathbf{r}/r = \nabla r$ (37.15),

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma mM}{r^2}\nabla r = \nabla\left(\frac{\gamma mM}{r}\right).$$

Por lo tanto, el campo del sol es conservativo y tiene el potencial

$$\varphi = -\frac{\gamma mM}{r}. \tag{12}$$

Una partícula que se mueve en el campo del sol tiene la energía total constante

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma mM}{r} = c. \tag{13}$$

Así, si un meteoro de masa m está en reposo cuando $r = \infty$, $c = 0$; y golpeara la superficie del sol $r = R$ con una velocidad V dada por

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{\gamma mM}{R} = 0, \qquad V = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}. \tag{14}$$

Si M y R denotan el radio y la masa de la tierra, (14) da la velocidad V con la que un meteoro de masa m entra a la atmósfera de la tierra. Cerca de la superficie de la tierra $r = R$ tenemos de (7) y (11)

$$g = \frac{\gamma M}{R^2}; \quad \text{en consecuencia} \quad V = \sqrt{2gR}.$$

Inversamente, a fin de que una partícula deje la tierra, debe ser

lanzada al menos con una velocidad V (despreciando la resistencia del aire). Así, V se llama frecuentemente "velocidad de escape". Tomando $R = 3\,960$ millas (6 373 kilómetros), $g = 32.2/5\,280$ millas por segundo por segundo (9.81 metros por segundo por segundo), encontramos que V es aproximadamente de 7 millas por segundo (11.27 kilómetros por segundo).

PROBLEMAS

1. Encontrar la función de potencial, si existe alguna, para los siguientes campos de fuerza:

(*a*) $\mathbf{f} = \mathbf{c}$ (constante);

(*b*) $\mathbf{f} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$;

(*c*) $\mathbf{f} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$;

(*d*) $\mathbf{f} = r^{n-1}\mathbf{r}$.

2. Cuando $\mathbf{f} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$, demostrar que el trabajo realizado por $\mathbf{f}$ al recorrer el circuito de una curva plana cerrada es $2A\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}$, donde $A\mathbf{n}$ es el área vectorial encerrada por la curva.

3. Demostrar que la fuerza

$$\mathbf{f} = [yz^2,\ xz^2 - 1,\ 2xyz - 2]$$

es conservativa y encontrar su función de potencial $\varphi(x, y, z)$ para la cual $\varphi(0, 0, 0) = 0$.

Encontrar el trabajo realizado por $\mathbf{f}$ en una trayectoria desde (1, 2, 3) hasta (3, 5, $-$ 1).

4. A una distancia r_0 del centro del sol se lanza un cuerpo dentro de su campo con una velocidad $v_0 < \sqrt{2\gamma M/r_0}$. Demostrar que no puede abandonar el campo del sol.

5. Si la velocidad de un planeta en su perihelio ($r = r_1$) es v_1, encontrar su velocidad v_2 en su afelio ($r = r_2$).

6. En el movimiento armónico elíptico una partícula con masa m es atraída hacia el origen con una fuerza $\mathbf{f} = -mk\mathbf{r}(k > 0)$. Encontrar el potencial y demostrar que $v^2 + kr^2 =$ constante.

7. Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente hacia arriba desde la tierra (radio R) con la velocidad v_0. Encontrar la altura h que alcanza si

(*a*) $\mathbf{f} = -mg\nabla z$, donde z es la distancia sobre la superficie;

(*b*) $\mathbf{f} = -mg\dfrac{R^2}{r^2}\nabla r$, donde r es la distancia al centro de la tierra.

61. El sistema solar. La mecánica celeste se basa, según Isaac Newton, en la

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL. *Dos cuerpos cualesquiera, cuyas dimensiones sean despreciables en comparación con la distancia que los separa, se atraen entre sí con fuerzas dirigidas según la línea recta que los une y cuya magnitud co-*

mún es directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.

Las consecuencias de esta ley han sido comprobadas por la observación en numerosos casos. La ley de la gravitación de Einstein, que trata con fuerzas que actúan a gran distancia, explica una ligera discrepancia en el movimiento del planeta Mercurio (el avance de su perihelio), y tiene también otras ventajas teóricas. Pero, como herramienta de trabajo, los astrónomos usan aún la ley de Newton exclusivamente para tratar con el movimiento de los planetas y sus satélites, los asteroides, los cometas y también para explicar algunos fenómenos terrestres, tales como las mareas y la precesión de los equinoccios. En resumen, la ley de Newton es aún un milagro de exactitud y, solamente en algunos casos especiales, debe ser reemplazada por la ley de Eeinstein.

Volvamos ahora a uno de los más famosos problemas en la dinámica: *¿Cómo se mueve un planeta en el campo de fuerza del sol?* La solución de este problema fué obtenida empíricamente por Johann Kepler a principios del siglo XVII. Cerca de cincuenta años después Newton descubrió que todas las leyes de Kepler eran consecuencias de su ley de la gravitación y de su segunda ley del movimiento. † Daremos ahora su deducción en forma vectorial, usando las leyes de Newton y la incomparable arma que él inventó, el cálculo.

Tomemos el sol, de masa M, como fijo en el espacio, y escojamos su centro como origen para los vectores de posición. Sea el planeta de masa m con el vector de posición $\mathbf{r} = r/\mathbf{R}$; puesto que el movimiento resulta ser plano, escribimos $\mathbf{R} = r/r$ para el vector unitario radial. Tratando al sol y a los planetas como partículas, la ecuación del movimiento del planeta es

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\mathbf{R}.$$

El miembro derecho representa la atracción del sol sobre el planeta de acuerdo con la ley de Newton, y γ es la constante

† En las propias palabras de Newton: "Todo esto fue en los dos años funestos de 1865 y 1866, puesto que en esos días estaba apenas en las primicias de mi invención y me importaban más las matemáticas y la filosofía que en cualquier otra época". Newton tenía entonces unos 22 o 23 años de edad.

de gravitación. Nuestra ecuación del movimiento es, por lo tanto,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\gamma M}{r^2}\mathbf{R} \tag{1}$$

Multiplicamos escalarmente a (1) por $\mathbf{r}$; entonces, puesto que

$$\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}), \qquad \mathbf{r}\times\mathbf{R} = 0,$$

tenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = 0,$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = \mathbf{h}\ \text{(constante)}. \tag{2}$$

Si $\mathbf{h} = 0$, $\mathbf{v}$ es radial y el movimiento es rectilíneo. Si $\mathbf{h} \neq 0$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son siempre perpendiculares a $\mathbf{h}$ y la órbita está en un plano que pasa por el sol. Más aún, el área vectorial del sector OAP (Fig. 61*a*) es

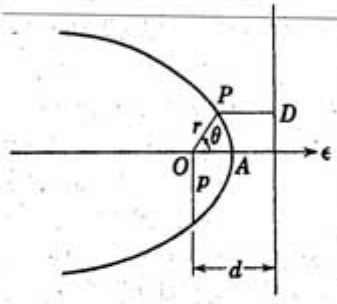


Fig. 61*a*. Órbita de un planeta.

$$k\mathbf{S} = \frac{1}{2}\oint \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \mathbf{r}\times\mathbf{v}\,dt, \tag{51.4}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = \frac{1}{2}h, \qquad h = |\mathbf{h}| \tag{3}$$

La velocidad sectorial de un planeta con respecto al sol es constante.

Puesto que

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = r\mathbf{R}\times\left(r\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{R}\right) = r^2\,\mathbf{R}\times\frac{d\mathbf{R}}{dt},$$

(2) puede escribirse como

$$\mathbf{h} = r^2\,\mathbf{R}\times\frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

Multiplicando vectorialmente (1) por esta ecuación, encontramos que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = -\gamma M\mathbf{R}\times\left(\mathbf{R}\times\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right) = \gamma M\frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

puesto que $\mathbf{R}\cdot(d\mathbf{R}/dt) = 0$. Esto puede ser integrado, de manera que

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = \gamma M(\mathbf{R} + \boldsymbol{\epsilon}), \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}$ es la constante vectorial de integración.

La ecuación de la órbita se obtiene ahora eliminando $\mathbf{v}$ de (2) y de (4). Multiplíquese escalarmente a (2) por $\mathbf{h}$, (4) por $\mathbf{r}$; entonces

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} = h^2, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{h} = \gamma M(r + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r}).$$

Puesto que los miembros izquierdos son iguales, (13.4), los derechos también lo son; entonces, escribiendo $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r} = \varepsilon r \cos\theta$, donde θ es el ángulo $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{r})$,

$$r = \frac{h^2/\gamma M}{1 + \varepsilon \cos\theta}. \tag{5}$$

Esta es la ecuación polar de una sección cónica de excentricidad ε referida a su foco como polo y a su eje como recta inicial. Puesto que por la definición de una cónica a partir de su foco-directriz, tenemos (Fig. 61*a*)

$$\frac{PO}{PD} = \frac{r}{d - r\cos\theta} = \varepsilon,$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta} \qquad (p = \varepsilon d), \tag{6}$$

donde p es el *parámetro* de la cónica. Puesto que $r = p$ cuando $\theta = \pi/2$, p es la mitad de la anchura de la cónica en el foco. Esta es la misma ecuación que (5) si ponemos $h^2/\gamma M = \varepsilon d$; la órbita es, por lo tanto una elipse, parábola o hipérbola si ponemos la excentricidad $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, o $\varepsilon > 1$. Puesto que las únicas cónicas *cerradas* son las elipses, *los planetas describen elipses alrededor del sol que se encuentra en un foco.* Las órbitas de los cometas pueden ser elipse, parábolas o hipérbolas.

Puesto que la velocidad sectorial $\frac{1}{2}h$ es constante, el período de revolución T en una órbita elíptica se obtiene dividiendo el área de la elipse por la velocidad sectorial. El eje mayor $2a$ de la elipse es donde $r_1 + r_2$ son las distancias que corresponden al perihelio ($\theta = 0$ y al afelio ($\theta = \pi$). Ahora, de (5),

$$\frac{\gamma M}{h^2} r_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon}, \qquad \frac{\gamma M}{h^2} r_2 = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

y, sumando,

$$\frac{\gamma M}{h^2} 2a = \frac{2}{1 - \varepsilon^2}, \qquad h = \sqrt{\gamma M a(1 - \varepsilon^2)}.$$

El área de una elipse de semi-ejes a, b es πab o $\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$; por lo tanto, el período de revolución es

$$T = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}}\, a^{3/2};$$

y

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}. \tag{7}$$

La razón T^2/a^3 es la misma para todos los planetas en el sistema solar. Más aún, en general esta razón es constante para todos los cuerpos que giran alrededor del mismo centro de atracción —las doce lunas de Júpiter, por ejemplo (M en (7) es, entonces, la masa de Júpiter).

Así, la ley newtoniana de la gravitación nos ha llevado a la demostración de las

TRES LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS.

I. *Los planetas describen elipses con el sol como uno de sus focos.*

II. *El radio vector del sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*

III. *Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias† al sol.*

Estas leyes fueron establecidas por Kepler después de un cuidadoso estudio de las observaciones astronómicas, las dos primeras en 1609, la tercera en 1618. El descubrimiento de que estas leyes, tan diversas en su contenido, se originan todas en el mismo principio, la ley de la gravitación, fue una de las mayores contribuciones de Newton y un perenne monumento a la mente del hombre.

La ecuación de la energía de un planeta

$$v^2 - \frac{2\gamma M}{r} = \text{constante} \qquad (60.13), \tag{8}$$

da su velocidad como una función de su distancia al sol. La *velocidad* del planeta puede encontrarse a partir de (4). La ecuación (2) muestra que la dirección de h está referida al sentido

† Puesto que el semi-eje mayor $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ este se llama: la *distancia media* al sol. Para la tierra, $a \simeq$ 92 900 000 millas (149 504 788 kilómetros) la unidad astronómica.

en que el planeta describe su órbita por la regla del tornillo de rosca derecha. Si ponemos $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$, donde $\mathbf{k}$ es un vector unitario perpendicular al plano de la órbita y multiplicamos escalarmente a (4) por $\mathbf{k}$, encontramos que

$$\mathbf{v} = \frac{\gamma M}{h}(\mathbf{P} + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}). \tag{9}$$

Puesto que el ángulo polar $\theta = (\mathbf{e}, \mathbf{R})$, el vector de excentricidad $\mathbf{e} = \varepsilon\mathbf{i}$, donde $\mathbf{i}$ es un vector unitario en la dirección de OA.

Si trazamos $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ desde un punto fijo, la curva trazada por V se llama un *odógrafo*. La ecuación (9) muestra ahora que

El odógrafo de un planeta es un círculo.

Demostración. Tracemos los vectores velocidad $\overrightarrow{OV}$ usando a $\gamma M/h$ como unidad de velocidad y dibujemos $\overrightarrow{OC} = \varepsilon\mathbf{j}$. Entonces, (9) muestra que

$$\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{j} + \mathbf{P} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV},$$

donde $CV = 1$ (Fig. 61*b*). Así el odógrafo es un círculo unitario con C como centro.

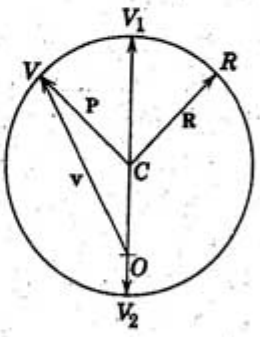


Fig. 61*b*. Odógrafo de un planeta.

Para encontrar la velocidad en cualquier punto P de la órbita, trazamos $\overrightarrow{CR}$ paralelo al radio focal $\overrightarrow{OP}$ del planeta y $\overrightarrow{CV}$ 90° adelante de $\overrightarrow{CR}$; entonces $v = \overrightarrow{OV}$. Las velocidades en el perihelio y en el afelio son $\overrightarrow{OV}_1$ y $\overrightarrow{OV}_2$; y obviamente

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{a(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} = \frac{r_2}{r_1},$$

donde r_1, v_1, se refieren al perihelio, r_2, v_2 al afelio. Estos resultados concuerdan con (2); puesto que $v_1 r_1 = v_2 r_2 = h$.

Puesto que $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ da la dirección de la tangente a la cónica en P, la Fig. 61*b* da un método simple para trazar las tangentes a una cónica cuando solamente se da *un* foco. Nótese que, cuando $\varepsilon = 0$, la órbita es un círculo y cuando $\varepsilon = 1$, es una parábola.

Si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{v}_1$ dan la posición vectorial y la velocidad del planeta en el perihelio, tenemos, de la ecuación de energía

$$(8)' \qquad \mathbf{v}^2 - \frac{2\gamma M}{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_1^2 - \frac{2\gamma M}{\mathbf{r}_1}$$

En el perihelio $\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1 = 0$; y, de (2), $\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{h}$.

Aún más, en el perihelio tenemos de (9)

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\gamma M}{\mathbf{h}} |\mathbf{P} + \mathbf{k} \times \varepsilon| = \frac{\gamma M}{\mathbf{h}} (1 + \varepsilon) = \frac{\gamma M (1 + \varepsilon)}{\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1}.$$

Esta ecuación da $\mathbf{v}_1^2 = \left(\frac{\gamma M}{\mathbf{r}_1}\right)(1 + \varepsilon)$; y desde $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}(1 - \varepsilon)$, (8)′ resulta

$$\mathbf{v}^2 - \frac{2\gamma M}{\mathbf{r}} = \frac{\gamma M}{\mathbf{r}_1}(1 + \varepsilon) - \frac{2\gamma M}{\mathbf{r}_1} = \frac{\gamma M}{\mathbf{r}_1}(\varepsilon - 1) = -\frac{\gamma M}{\mathbf{a}};$$

de donde

$$(10) \qquad \mathbf{v}^2 = \gamma M \left(\frac{2}{\mathbf{r}} - \frac{1}{\mathbf{a}}\right).$$

Así, si la velocidad $\mathbf{v}$ y la distancia $\mathbf{r}$ de un planeta es conocida en cualquier instante, la distancia media del planeta al Sol (su eje $\mathbf{a}$ semimayor) puede calcularse de (10).

La ecuación (10) puede también usarse para encontrar la distancia de un satélite a un planeta, desde el centro del planeta. Así, si un satélite artificial es proyectado de la Tierra a una distancia $\mathbf{r}$ con una velocidad $\mathbf{v}$, girará alrededor de la Tierra en una elipse para la cual

$$\frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{2}{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{v}^2}{\gamma M}$$

El período T de un satélite artificial puede encontrarse por la forma correcta de la tercera ley de Kepler dada en (62.15):

$$\frac{T^2(M + m)}{\mathbf{a}^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} = \text{constante}$$

para todos los satélites de un planeta de masa M. Luego, si T_0 y m_0 denotan el período y masa de la Luna, T y m los valores para un satélite artificial de la tierra, tenemos

$$\frac{T^2(M + m)}{\mathbf{a}^3} = \frac{T_0^2(M + m_0)}{\mathbf{a}_0^3}$$

Podemos omitir obviamente la masa m de un pequeño satélite por el término $M + m$; de donde

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{m_0}{M}\right)^{1/2}$$

donde m_0/M es la razón de la masa de la Luna a la de la Tierra.

PROBLEMAS

1. La órbita de un planeta o cometa es la cónica (6) de excentricidad ε y parámetro p. Demuestre que en su velocidad sectorial es proporcional a $\sqrt{p}$.

2. Si $\mathbf{h} = 0$ en (2), demuestre que $\mathbf{v} = v\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ constante) y que

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma M}{r^2}, \qquad v^2 - \frac{2\gamma M}{r} = \text{const.}$$

3. El *cometa de Halley* tiene un período de aproximadamente 76 años. En el perihelio, su distancia del sol es 0.58 de unidad astronómica (el semi-eje mayor de la órbita de la tierra). Encontrar su distancia en el afelio y la excentricidad de su órbita.

4. El período de Mercurio es de 88 días; ¿cuál es su distancia media del sol?

62. Sistemas de partículas. Las fuerzas que actúan sobre cualquier sistema de partículas pueden dividirse en dos clases: (1) las *fuerzas externas* ejercidas por partículas que no se encuentran en el sistema dado, y, (2) las *fuerzas internas* que consisten en las acciones mutuas entre las partículas del sistema. Las fuerzas internas pueden agruparse en parejas que representen la interacción de dos partículas del sistema. Entonces, de acuerdo con el principio de la acción y la reacción, las fuerzas de cada pareja son iguales en magnitud y opuestas en sentido, teniendo una línea de acción común. En consecuencia, la suma vectorial de las fuerzas de cada pareja es cero y la suma de sus momentos con respecto a cualquier punto es cero. Puesto que las fuerzas internas se encuentran sólo en parejas, deducimos que

En cualquier sistema de partículas la suma vectorial de las fuerzas internas y la de sus momentos, con respecto a cualquier punto, es cero.

Consideremos ahora cualquier partícula P de masa m perteneciente al sistema y sobre la que actúan las fuerzas externas $\mathbf{f}$ y las internas $\mathbf{f}'$; entonces

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{f} + \sum \mathbf{f}'.$$

Más aún, si A es cualquier punto, móvil o fijo, escogido como el centro de los momentos, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{AP}$,

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}'.$$

Aquí $m\alpha$ se llama *aceleración de masa* de la partícula y $\mathbf{r} \times m\alpha$ *momento de la aceleración de masa* con respecto a A. Ahora, formamos estas ecuaciones para cada partícula del sistema y sumamos las ecuaciones de cada conjunto. Entonces, puesto que $\Sigma\Sigma\mathbf{f}' = \mathbf{0}$ y $\Sigma\Sigma\mathbf{r} \times \mathbf{f}' = \mathbf{0}$, obtenemos

$$\sum m\mathbf{a} = \sum\sum \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\sum \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \sum\sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \tag{2}$$

Estas ecuaciones fundamentalmente en la dinámica de sistemas pueden establecerse como sigue:

TEOREMA 1. *Para cualquier sistema de partículas, la suma vectorial de las aceleraciones de masa es igual a la suma de las fuerzas externas.*

TEOREMA 2. *Para cualquier sistema de partículas, la suma vectorial de los momentos de las aceleraciones de masa con respecto a cualquier punto (fijo o móvil) es igual a la suma de los momentos de las fuerzas externas con respecto al mismo punto.*

Las dobles sumas de arriba indican que las fuerzas o momentos se suman primero en cada partícula y las sumas se suman entonces para el sistema entero. En lo sucesivo, sin embargo, escribiremos simplemente $\Sigma\mathbf{f}$, $\Sigma\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ para estas sumas.

Las aceleraciones de masa $m\alpha$ se toman frecuentemente como fuerzas ficticias que actúan sobre las partículas —las llamadas *fuerzas de inercia*. Si escribimos ahora (1) y (2) en la forma

$$\sum \mathbf{f} + \sum (-m\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{1}'$$

$$\sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \sum \mathbf{r} \times (-m\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{2}'$$

vemos de §23 que las fuerzas de inercia y las fuerzas externas forman un sistema en equilibrio. Este resultado se conoce como el

PRINCIPIO DE D'ALEMBERT. *Las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas y las fuerzas de inercia inversas son equivalentes a cero.*

El *momento* de una partícula P de masa m es el vector $m\mathbf{v}$, y su *momento de momentos* con respecto a O es $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}(\mathbf{r} = \overrightarrow{OP})$. Para un sistema de partículas, ya sea discreto o continuo, el momento y el momento de momentos se definen como las sumas respectivas (o integrales) tomadas sobre todas las partículas del sistema:

$$\mathbf{M} = \sum m\mathbf{v} \quad \text{o} \quad \int \mathbf{v}\, dm, \tag{3}$$

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad \text{o} \quad \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm, \tag{4}$$

donde las integrales se aplican a distribuciones de masa continuas.

Podemos ahora poner las ecuaciones fundamentales (1-2) en la forma

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \tag{5}$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}; \tag{6}$$

puesto que al calcular $d\mathbf{H}/dt$, el término $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Cuando $\Sigma\mathbf{f} = \mathbf{0}$, obtenemos de (5) el importante teorema sobre la

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO. *Si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas es nula, el momento del sistema permanece constante.*

Cuando las partículas se asocian con números iguales a sus masas, su centroide (7) se llama el *centro de masa* del sistema. De (7.3), el vector de posición $\mathbf{r}^*$ del centro de masa está dado por

$$(\sum m)\mathbf{r}^* = \sum m\mathbf{r} \tag{7.3}$$

Derivando (3) dos veces con respecto al tiempo, obtenemos

$$(\sum m)\mathbf{v}^* = \sum m\mathbf{v} = \mathbf{M}, \tag{8}$$

$$(\sum m)\mathbf{a}^* = \sum m\mathbf{a} = \sum \mathbf{f}. \tag{9}$$

Estas ecuaciones establecen que:

El momento del sistema es el mismo que el de una partícula que tenga la masa total del sistema y que se mueva con su centro de masa.

El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como una partícula libre que tenga la masa del sistema y sobre la que actúa la resultante de las fuerazs externas.

En particular, si $\Sigma \mathbf{f} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{a}^* = \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}^* = \text{constante.} \tag{10}$$

Cuando la suma de las fuerzas externas sobre un sistema material es nula, su centro de masa permanecerá en reposo o se moverá en línea recta.

Finalmente, la energía cinética E de un sistema de partículas se define como la suma de sus energías cinéticas; así

$$E = \sum \frac{1}{2} m v^2 \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2} \int v^2 \, dm. \tag{11}$$

Ejemplo. Problema de dos cuerpos: Para encontrar los movimientos de dos cuerpos sujetos solamente a sus atracciones newtonianas mutuas.

En nuestro tratamiento del problema del sol y del planeta en §61, tomamos al sol como fijo. Si tomamos a todas las fuerzas externas sobre el sol y el planeta como despreciables, sus fuerzas internas se cancelan por el principio de la acción y la reacción (§58); en consecuencia, el centro de masa P^* del sol y del planeta se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}^*$. Entonces, si escogemos un sistema de referencia $\mathcal{F}^*$ que se mueva a la velocidad $\mathbf{v}^*$, podemos tomar a P^*, que está en reposo en este sistema, como origen. Si los vectores de posición del sol S y del planeta P son $\mathbf{s}$ y $\mathbf{r}$,

$$M\mathbf{s} + m\mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{7.1}.$$

El vector de posición de P con respecto a S es $\mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{s}$. Las ecuaciones del movimiento del planeta y del sol en el sistema $\mathcal{F}^*$ son ahora

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{Mm}{p^2} \mathbf{R}, \tag{12}$$

$$M \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \gamma \frac{Mm}{p^2} \mathbf{R}, \tag{13}$$

donde $\mathbf{R}$ es un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{SP}$. Si dividimos (12) por m, (13) por M, y restamos, tenemos que

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = -\gamma \frac{M+m}{p^2} \mathbf{R}. \tag{14}$$

Esta ecuación tiene la forma de (61.1) con $\mathbf{p}$ en vez de $\mathbf{r}$ y $M + m$ en vez de M. La órbita de P relativa al sol S es por lo tanto una elipse

en la cual SP barre áreas iguales en tiempos iguales. Pero en vez de (61.7), tenemos ahora

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(M+m)}. \tag{15}$$

Entonces T^2/a^3 no es estrictamente la misma para todos los planetas, como asegura la tercera ley de Kepler. Pero, puesto que la masa del sol es 1 000 veces mayor que la de Júpiter, que es el planeta más grande, $M + m$ en (15) puede ser reemplazado por M sin error serio. La tercera ley es, por lo tanto, casi cierta.

63. Cuerpo que gira alrededor de un eje fijo. Las partículas de un cuerpo rígido que gira alrededor del eje z con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ tienen las velocidades $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (34.2). Su momento es, entonces,

$$\mathbf{M} = \int \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\, dm = m\, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*,$$

donde $\mathbf{r}^*$ localiza su centro de masa P^*. Si P^* está sobre el eje de rotación, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, independientemente de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Si se aplican fuerzas $\mathbf{f}$ al cuerpo, las reacciones $\mathbf{f}_b$ sobe los cojinetes serán tales que

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum \mathbf{f} + \sum \mathbf{f}_b. \tag{1}$$

En particular, si P^* está sobre el eje, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $d\mathbf{M}/dt = 0$, y $\Sigma\mathbf{f} + \Sigma\mathbf{f}_b = \mathbf{0}$.

El momento de momento con respecto a O es

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm; \tag{2}$$

por lo tanto,

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r})\, dm = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}_b, \tag{3}$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\mathbf{k} = \alpha\mathbf{k} \tag{4}$$

es el vector *aceleración angular*. El número con signo $\alpha = d\omega/dt$ se llama también aceleración angular (radianes por segundo^2).

Si la fricción en los cojinetes es despreciable, las reacciones de rozamiento $\mathbf{f}_b$ pasan por el eje z y podemos deshacernos de ellas tomando momentos con respecto a su eje. La aceleración

de una partícula P a una distancia p del eje (Fig. 63), tiene las componentes radial y transversal $\omega^2 p$, $p\dot{\omega}$ (Ej. 32.1); po lo tanto, el momento total de las fuerzas de inercia con respecto al eje z es

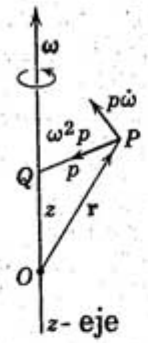


Fig. 63. Revolución alrededor de un eje fijo.

$$\dot{\omega} \int p^2 \, dm = \omega I,$$

donde $I = \int p^2 \, dm$ es el *momento de inercia* del cuerpo con respecto al eje de rotación. Más aún, el momento (o *torque*) de las fuerzas externas con respecto a este eje es

$$T = \Sigma \, \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

puesto que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{f}_b = 0$. La ecuación del movimiento es, entonces,

$$I \frac{dw}{dt} = T. \tag{5}$$

Esta ecuación puede también ser obtenida multiplicando escalarmente (3) por $\mathbf{k}$, puesto que el momento con respecto al eje z es la componente sobre ese eje del momento con respecto a O (§19). †

Puesto que la velocidad de una partícula a una distancia p del eje es ωp, el cuerpo tiene la energía cinética

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 \int p^2 \, dm = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{6}$$

Multiplicando (5) por $\omega = d\theta/dt$, tenemos

$$I \, \omega \frac{d\omega}{dt} = T \frac{d\theta}{dt};$$

la integración entre t_1 y t_2 da ahora

$$\frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T \, d\theta, \tag{7}$$

El miembro izquierdo es la variación de la energía cinética

† $\int \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) \, dm = \alpha \int (r^2 - z^2) \, dm = \alpha \int p^2 \, dm.$

desde el tiempo t_1 hasta t_2; y, si el cuerpo gira un total de $\theta_2 - \theta_1$ radianes en este tiempo,

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T\, d\theta \tag{8}$$

es el trabajo realizado por el torque T durante este intervalo (§60).

PROBLEMAS

1. Si un torque constante actúa sobre un cuerpo montado sobre un eje liso, $\alpha = d\omega/dt$ es constante. Si $\theta = 0$, $\omega = \omega_0$ cuando $t = 0$, demostrar que

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad \theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta.$$

2. Una varilla delgada uniforme de masa m y longitud l está libre para girar alrededor de un eje horizontal O en un extremo. Si se suelta desde una posición horizontal, demostrar que su velocidad angular cuando esta vertical es $\omega = \sqrt{3g/l}$ radianes por segundo. [$I = ml^2/3$.]

3. La varilla del Prob. 2 se mueve ligeramente de su posición más baja ($\theta = 0$) y se suelta. Demostrar que su ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l} \operatorname{sen} \theta,$$

y que, para vibraciones pequeñas, su período es próximo a $2\pi\sqrt{2l/3g}$ segundos.

4. Un volante y su eje disminuyen su velocidad de 200 a 180 rpm en 42 segundos debido a la fricción axial. Bajo un torque de freno de 18 libras-pies (2 kg), disminuye de 200 a 180 rpm en 18 segundos. Encontrar su momento de inercia. Tómense el pie, el radián, la libra (fuerza), la masa (slug) como unidades, así como sus equivalentes en el sistema métrico.

5. Si la varilla del Prob. 2 se suelta desde una posición vertical sobre su eje, demostrar que $\omega = \sqrt{6g/l} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$ después que ha caído un ángulo θ.

Capítulo 7

Mecánica de los Flúidos

64. Flúidos perfectos. Asumimos, como hecho experimental, que la presión ejercida por el flúido *en reposo* sobre cualquier elemento es normal a la superficie. Para flúidos *en movimiento* esto no es cierto, puesto que los flúidos viscosos en movimiento ejercen fuerzas tangenciales a la vez que normales. Sin embargo, en muchos problemas las fuerzas tangenciales suelen ser pequeñ: , y, por lo tanto, despreciables. Desarrollaremos la mecánica de los flúidos sobre la hipótesis de presión normal solamente e implicaremos esta suposición hablando de flúidos *perfectos* o *no viscosos*. En resumen: *un flúido perfecto en reposo o en movimiento ejerce solamente presiones normales.*

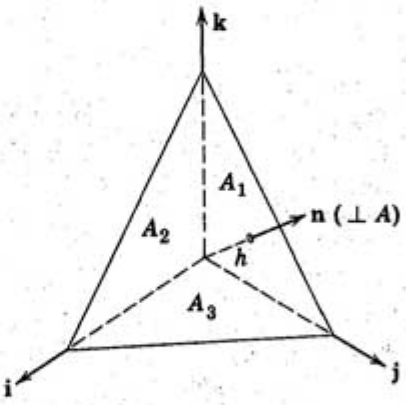


Fig. 64. Tetraedro flúido.

Consideremos ahora un pequeño tetraedro flúido con tres de sus caras paralelas a los planos coordenados (Fig. 64*a*). Supongamos que la cara inclinada, de área A, tenga el vector unitario $\mathbf{n}$; entonces las caras normales a los ejes tendrán las áreas

$$A_1 = A\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}, \quad A_2 = A\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}, \quad A_3 = A\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}.$$

El volumen del tetraedro es $1/3Ah$, donde h es la altura sobre la cara A. Supongamos que el flúido ejerce presiones medias p_1, p_2, p_3, p sobre las caras A_1, A_2, A_3, A; y sean ρ, $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\alpha}$, las medias en el tetraedro de la densidad, fuerza del cuerpo por unidad de masa y aceleración. Entonces, por el principio de D'Alembert aplicado al flúido dentro del tetraedro,

$$p_1A_1\mathbf{i} + p_2A_2\mathbf{j} + p_3A_3\mathbf{k} - pA\mathbf{n} + \tfrac{1}{3}Ah\rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Reemplacemos ahora a A_1, A_2, A_3 por sus valores, dividamos a A y hagamos que $h \to 0$; entonces las presiones límites en O satisfacen la relación

$$p_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + p_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + p_3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = p\mathbf{n}.$$

Si multiplicamos escalarmente esta ecuación por **i**, **j**, **k** sucesivamente, obtenemos

$$p_1 = p_2 = p_3 = p.$$

En cualquier punto en el interior de un flúido perfecto la presión es la misma en todas las direcciones.

65. Ecuación de continuidad. Sean ρ y $\mathbf{v}$ la densidad y la velocidad de un flúido en el punto $\mathbf{r} = [x, y, z]$ en el instante t. Tanto ρ como v son funciones de x, y, t y t. Consideremos ahora la masa del flúido dentro de una superficie cerrada S fija pero arbitraria. Esta masa es creciente según la relación

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV,$$

donde la derivación con respecto al tiempo es local (**r** fija). Esta relación es igual a la que el flúido está *entrando* en S, es decir

$$-\oint \mathbf{n}\cdot\rho\mathbf{v}\, dS,$$

donde **n** es la normal unitaria externa a S. Entonces

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint \mathbf{n}\cdot\rho\mathbf{v}\, dS = -\int \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\, dV$$

por el teorema de divergencia; y, puesto que

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right] dV = 0$$

para cualquier S,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

si el miembro izquierdo es continuo.

Esta *ecuación de continuidad* puede ponerse en otra forma introduciendo la relación *esencial* de cambio $d\rho/dt$ en vez

de la relación *local* de tiempo $\partial\rho/\partial t$. A lo largo de la trayectoria, o *línea de movimiento*, de la partícula flúida,

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

la densidad $\rho(x, y, z, t)$ se convierte en una función de t solamente, y

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Ahora

$$\mathbf{v} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right], \qquad \nabla\rho = \left[\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}, \frac{\partial\rho}{\partial z}\right],$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho. \tag{2}$$

Si ponemos ahora

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} \qquad (41.4),$$

la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Puesto que $\operatorname{div}\mathbf{v} = -(d\rho/dt)/\rho$, podemos interpretar a $\operatorname{div}\mathbf{v}$ como la relación relativa a la que está decreciendo la densidad. Así, un valor positivo de $\operatorname{div}\mathbf{v}$ implica una $d\rho/dt$ negativa y, consecuentemente, una disminución de la circulación del flúido en el punto considerado; de ahí el término *divergencia*.

Los líquidos pueden tomarse como casi incompresibles. Para un flúido incompresible la densidad de cualquier partícula flúida permanece constante en el tiempo; entonces $d\rho/dt = 0$, y de (3),

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

Esta ecuación tiene la integral equivalente

$$\oint \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dS = 0; \tag{5}$$

el flujo de un flúido no compresible a través del límite de una superficie cerrada fija es nulo. Si un flúido incompresible es también homogéneo, ρ es constante en el tiempo y en el espacio.

Notamos finalmente que una relación de la forma (2) es

válida para cualquier función $F(\mathbf{r}, t)$ del tiempo y la posición asociada a una partícula flúida que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F. \tag{6}$$

Los tres términos se llaman, respectivamente, relaciones de cambio *esencial*, *local* y *constante*. Así, la aceleración de una partícula flúida en movimiento es

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}; \tag{7}$$

aquí $\partial \mathbf{v}/\partial t$ es la relación de cambio de la velocidad del flúido en un punto fijo.

Las curvas que en cualquier instante son tangentes a $\mathbf{v}$ se llaman *líneas de corriente* del flúido. No son ellas las trayectorias o líneas de movimiento de las partículas flúidas, excepto cuando el flujo es constante; esto es, cuando en cualquier punto, $\mathbf{v}$ no varía con el tiempo ($\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$). Así, las líneas de corriente tienen la ecuación diferencial $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

66. Ecuación de Euler. El método *euleriano* o *estadístico* de tratar el movimiento de un flúido, trata de encontrar la velocidad $\mathbf{v}$, la densidad ρ y la presión p del flúido como funciones de t y $\mathbf{r}$, el tiempo y la posición. Así, x, y, z, t son las variables independientes.

Consideremos el flúido dentro de una superficie cerrada fija S en cualquier instante t. Por el principio de D'Alembert (§62), las fuerzas del cuerpo y de la superficie, junto con las fuerzas inversas de inercia ($-m\boldsymbol{\alpha}$), pueden ser tratadas como un sistema en equilibrio estático. En un flúido perfecto la fuerza de superficie es una presión normal $-p\mathbf{n}$. Si $\mathbf{f}$ denota la fuerza del cuerpo por unidad de masa y $\boldsymbol{\alpha}$ la aceleración de las partículas del flúido, entonces

$$\int (\mathbf{f} - \mathbf{a})\rho \, dV - \oint \mathbf{n} p \, dS = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\int \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \mathbf{a})\rho \, dV - \oint \mathbf{r} \times \mathbf{n} p \, dS = \mathbf{0}, \tag{2}$$

Estas ecuaciones establecen que la suma de todas las fuerzas (reales y de inercia), que actúan sobre el flúido dentro de S, así como la suma de sus momentos vectoriales con respecto a O son nulas. Si transformamos ahora las integrales de superficie en integrales de volumen:

$$\oint \mathbf{n}\, p\, dS = \int \nabla p\, dV \qquad (53.3),$$

$$\oint \mathbf{n} \times \mathbf{r} p\, dS = \int \text{rot}\,(p\mathbf{r})\, dV \qquad (53.2),$$

y obtenemos

$$(1)' \qquad \int [(\mathbf{f} - \mathbf{a})\rho - \nabla p]\, dV = \mathbf{0},$$

$$(2)' \qquad \int [\mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \mathbf{a})\rho + \text{rot}\,(p\mathbf{r})]\, dV = \mathbf{0}.$$

Puesto que estas integrales de volumen se anulan para cualquier selección arbitraria de S, sus integrandos, en caso de ser continuos, deben ser idénticamente nulos. Así, obtenemos las ecuaciones diferenciales parciales:

$$(3) \qquad (\mathbf{f} - \mathbf{a})\rho - \nabla p = \mathbf{0},$$

$$(4) \qquad \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \mathbf{a})\rho + \text{rot}\,(p\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

De (41.5),

$$\text{rot}\,(p\mathbf{r}) = \nabla p \times \mathbf{r} + p\, \text{rot}\, \mathbf{r} = \nabla p \times \mathbf{r},$$

y podemos escribir (4) como

$$\mathbf{r} \times [(\mathbf{f} - \mathbf{a})\rho - \nabla p] = \mathbf{0};$$

así, la ecuación de momento (4) es una mera consecuencia de (3). Obtenemos, pues, de (3), la ecuación del movimiento de Euler para un flúido perfecto:

$$(5) \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Cuando la densidad ρ es una función solamente de p, introducimos la función

$$(6) \qquad P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\ ; \text{ entonces } \quad \nabla P = \frac{dP}{dp} \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Más aún, si las fuerzas son conservativas,

$$(7) \qquad \mathbf{f} = -\nabla Q,$$

donde $Q(\mathbf{r})$ es un potencial escalar uniforme (§45). Bajo estas condiciones, la ecuación (5) de Euler se convierte en

$$(8) \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(Q + P).$$

Para un líquido con fuerzas debidas a la gravedad, tenemos

$$\rho = \text{const}, \qquad P = \frac{p}{\rho};$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} = -g\mathbf{k}, \qquad Q = gz,$$

cuando el eje z se dirige hacia arriba. Entonces (8), se convierte en

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\left(gz + \frac{p}{\rho}\right). \tag{9}$$

Ejemplo. Si un líquido gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ con respecto a un eje vertical, su distribución de velocidad $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ es la misma de un cuerpo rígido. Entonces

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla\left(gz + \frac{p}{\rho}\right).$$

Ahora.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r} \\ &= \omega^2(z\mathbf{k} - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}) \\ &= -\omega^2(x\,\nabla x + y\,\nabla y) \\ &= -\tfrac{1}{2}\omega^2\,\nabla(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

$$\nabla\left[gz + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)\right] = 0,$$

y

$$gz + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

En una superficie libre p es constante; una superficie libre es, por lo tanto, un paraboloide de revolución.

67. Flúido en equilibrio. Si ponemos $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0}$ en la ecuación de Euler (66.5), obtenemos la condición de equilibrio

$$\nabla p = \rho\mathbf{f}. \tag{1}$$

Así, un líquido estará en equilibrio bajo la gravedad cuando

$$\nabla p = \rho\mathbf{g} = \rho g\mathbf{k} = \rho g\,\nabla z = \nabla(\rho g z)$$

con el eje z dirigido hacia abajo; entonces, si $p = p_0$ cuando $z = 0$,

$$p = \rho g z + p_0. \tag{2}$$

Si el origen está sobre una superficie libre, p_0 es la presión atmosférica y ρgz se le llama *presión hidrostática.*

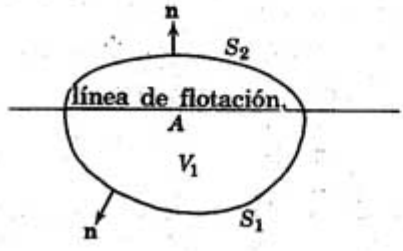


Fig. 67. Cuerpo flotante.

Ejemplo. Cuerpo flotante. Supongamos que la superficie S de un cuerpo flotante V se divide por el plano secante A en la línea de flotación, en dos partes: S_1 sumergida y S_2 en el aire (Fig. 67). Entonces, si p_0 es la presión atmosférica y $p_1 = \rho gz$ la presión hidrostática, $p_0 + p_1$ actúa sobre S_1 y p_0 sobre

S_2; o bien podemos decir que p_0 actúa sobre S mientras que p_1 lo hace sobre la superficie cerrada $S_1 + A$ ($p_1 = 0$ en A) que encierra el volumen V_1 bajo la línea de flotación. Entonces las ecuaciones de equilibrio del cuerpo son

$$\int_V \mathbf{g}\, dm - \oint_S \mathbf{n} p_0\, dS - \oint_{S_1+A} \mathbf{n} p_1\, dS = 0, \tag{3}$$

$$\int_V \mathbf{r}\times\mathbf{g}\, dm - \int_S \mathbf{r}\times\mathbf{n} p_0\, dS - \oint_{S_1+A} \mathbf{r}\times\mathbf{n} p_1\, dS = 0. \tag{4}$$

Consideremos sucesivamente las integrales en (3):

$$\int_V \mathbf{g}\, dm = m\mathbf{g} = W, \text{ el peso del cuerpo;}$$

$$\oint_S \mathbf{n} p_0\, dS = p_0 \oint \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{53.4},$$

$$\oint_{S_1+A} \mathbf{n} p_1\, dS = \int_{V_1} \nabla p_1\, dV = \int_{V_1} \rho\mathbf{g}\, dV = W \tag{53.3},$$

el peso del líquido desplazado. Por lo tanto, (3) establece que $W = W_1$; este es el

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES. *Un cuerpo flotante en equilibrio desplaza su propio peso de líquido.*

Si cambiamos los signos en (4), tenemos para considerar las siguientes integrales:

$$\int_V \mathbf{g}\times\mathbf{r}\, dm = \mathbf{g}\times\int_V \mathbf{r}\, dm = \mathbf{g}\times m\mathbf{r}^* = \mathbf{W}\times\mathbf{r}^*,$$

donde $\mathbf{r}^*$, definido mediante

$$m\mathbf{r}^* = \int \mathbf{r}\, dm, \tag{5}$$

(62.7),

localiza el centro de masa R^* del cuerpo;

$$p_0 \oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{r}\, dS = p_0 \int_V \operatorname{rot}\mathbf{r}\, dV = 0 \tag{53.2};$$

$$\oint_{S_1+A} \mathbf{n}\times p_1\mathbf{r}\, dS = \int_{V_1} \operatorname{rot}(p_1\mathbf{r})\, dV = \int_{V_1} (\nabla p_1)\times\mathbf{r}\, dV$$

$$= \mathbf{g}\times\int_{V_1} \rho\mathbf{r}\, dV = \mathbf{g}\times m_1\mathbf{r}_1^* = \mathbf{W}_1\times\mathbf{r}_1^*,$$

donde $\mathbf{r}_1^*$ localiza el centro de masa R_1^* del líquido desplazado. Puesto que $W = W_1$, (4) se reduce a

$$\mathbf{W}\times(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_1^*) = \mathbf{W}\times\overrightarrow{R_1^*R^*} = 0,$$

de tal manera que $R_1{}^* R$ es paralelo a W. En consecuencia:

El centro de masa de un cuerpo flotante y el del líquido desplazado (metacentro), se encuentran en la misma vertical.

PROBLEMAS

1. Un cuerpo (de superficie S), totalmente sumergido en un líquido, está sujeto a la presión normal $p = p_0 + g\rho z$ donde z se mide hacia abajo desde la superficie libre $z = 0$. Demostrar que

$$\oint_S p\mathbf{n}\, dS = V\rho g\, \mathbf{k},$$

el peso del líquido desplazado.

2. De la ecuación de equilibrio de flúidos $\nabla p = \rho \mathbf{f}$, demostrar que el equilibrio es posible solamente cuando $\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$.

Cuando ρ es función de p solamente demuestre que $\mathbf{f} = \nabla P$ y que $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$.

3. Suponiendo que la tierra es una esfera flúida de radio a y densidad constante ρ, y sin rotación, demostrar que la presión a una distancia r del centro es

$$p = \tfrac{1}{2} g\rho a(1 - r^2/a^2).$$

[La atracción sobre una masa unitaria a la distancia r es

$$\mathbf{f} = \gamma \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2}(-\mathbf{R}) = -\frac{gr}{a}\mathbf{R},$$

donde $-g\mathbf{R}$ es la atracción cuando $r = a$. En consecuencia,

$$\mathbf{f} = -\frac{g}{a} r \nabla r \quad \text{tiene el potencial} \quad Q = \frac{1}{2} g r^2/a.]$$

Calcular la presión en el centro si se toma ρ como la densidad media de la tierra ($\rho g = 5.525 \times 62.4$ lb por pie cúbico) (4.64 kg $\times$ dm^3).

4. Si un flúido está encerrado por una superficie fija $F(\mathbf{r}) = 0$, demostrar que la condición de límite $\mathbf{v} \cdot \nabla F = 0$ debe satisfacerse.

Más generalmente, si la superficie que bordea $F(\mathbf{r}, t) = 0$ varía con el tiempo, demostrar que el flúido satisface la condición de límite

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0 \qquad \text{[cf. (65.6)]}.$$

5. Una esfera de radio a se mueve dentro de un flúido con una velocidad constante $\mathbf{u}$. Demostrar que en la superficie de la esfera la velocidad $\mathbf{v}$ del flúido satisface la condición

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{u}t) = 0.$$

6. Si las fuerzas del cuerpo son conservativas ($\mathbf{f} = -\nabla Q$), las integrales

$$E = \int \frac{1}{2}\rho v^2\, dV, \qquad U = \int \rho Q\, dV$$

representan las energías potencial y cinética del flúido dentro de la región de integración. Demostrar que un flúido incompresible ($\rho =$ = const), tiene la ecuación de energía

$$\frac{d}{dt}(E + U) = -\oint p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\, dS \qquad [\text{supóngase } \partial Q/\partial t = 0].$$

68. Vorticidad. Comenzando con la ecuación de Euler en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla(Q + P) \qquad (66.8), \tag{1}$$

transformamos a $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ por medio de (41.9):

$$\tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Así, (1) puede escribirse como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\nabla(Q + P + \tfrac{1}{2}v^2), \tag{2}$$

y, por lo tanto

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}\right) = \mathbf{0} \qquad (40.10).$$

Ahora, puesto que $\mathbf{r}$ y t son variables independientes,

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v})$$
$$= (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \operatorname{rot} \mathbf{v} - (\operatorname{rot} \mathbf{v})(\operatorname{div} \mathbf{v})$$

de (41.7); y, puesto que

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\operatorname{rot} \mathbf{v} \qquad (65.6),$$

tenemos

$$\frac{d}{dt}\operatorname{rot} \mathbf{v} + (\operatorname{rot} \mathbf{v})(\operatorname{div} \mathbf{v}) = (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v}. \tag{3}$$

Un cuerpo rígido que tenga la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ tiene las velocidades $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ y $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ (Ej. 40.2). Para un líquido podemos considerar a

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\operatorname{rot} \mathbf{v} \tag{4}$$

como la rotación molecular o *vorticidad* de las partículas del flúido.

Reemplazamos ahora en (3) a rot $\mathbf{v}$ por $2\boldsymbol{\omega}$; y, de la ecuación de continuidad (65.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Entonces (3), después de dividirse por 2ρ, se convierte en

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v},$$

esto es,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v}. \tag{5}$$

que se conoce como la *ecuación de Helmholtz.*

69. Teorema de circulación. La integral de línea de la velocidad $\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr}$ sobre cualquier trayectoria se llama el *flujo* a lo largo de esa trayectoria. Si la trayectoria es cerrada, el flujo se llama *circulación.*

El flujo sobre una trayectoria Γ_0 en el instante $t = 0$ es

$$F(0) = \int_0^{s_1} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\, ds,$$

donde se toma como parámetro al arco s sobre la trayectoria Γ_0. En un instante posterior t las partículas de flúido que forman a Γ_0 se mueven a otra curva Γ; y, puesto que las partículas que forman a Γ están en correspondencia biunívoca con las de Γ_0 podemos todavía utilizar al arco s sobre Γ_0 como parámetro para calcular el flujo sobre Γ:

$$F(t) = \int_0^{s_1} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\, ds.$$

La velocidad $\mathbf{v}$ es una función $\mathbf{v}(s, t)$ de s y de t; y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s, 0)$ a lo largo de Γ_0, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s, t)$ a lo largo de Γ, teniendo t el valor constante dado. Cuando se da Γ_0, $F(t)$ es una función de t solamente; así

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^{s_1} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial s}\right] ds$$

$$= \int_0^{s_1} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s \partial t} \right] ds$$

$$= \int_0^{s_1} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right) ds$$

donde $\mathbf{v} = \partial \mathbf{r}/\partial t$ y $\mathbf{a} = \partial \mathbf{v}/\partial t$ son la velocidad y la aceleración de la partícula de flúido correspondientes a cierta s en Γ_0. Si las fuerzas del cuerpo son conservativas y ρ es una función de p (o constante), tenemos $\mathbf{a} = -\nabla(Q + P)$ de (66.8) y

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \mathbf{a} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \nabla(Q + P) = -\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial s}, \quad \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\tfrac{1}{2}v^2);$$

por lo tanto, si Γ une los puntos A y B,

$$(1) \qquad \frac{dF}{dt} = \int_0^{s_1} \frac{\partial}{\partial s} \left(\tfrac{1}{2}v^2 - Q - P \right) ds = \tfrac{1}{2}v^2 - Q - P \Big|_A^B,$$

de tal manera que dF/dt depende sólo de los extremos de Γ. En particular, si Γ es una curva cerrada, $F(t)$ se convierte en la circulación sobre Γ, y

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Este es el

TEOREMA DE CIRCULACIÓN (de Lord Kelvin). *Si las fuerzas del cuerpo son conservativas y la densidad es una función solamente de p o es constante, la circulación en cualquier curva cerrada que se mueve con el flúido no se altera con el tiempo.*

Si, en cualquier instante t_0, rot $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en una región simplemente conexa, el teorema de Stokes muestra que la circulación sobre cualquier curva cerrada Γ_0 en la región es nula:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dS = 0;$$

y, si esta curva se mueve con el flúido, la circulación alrededor de ella permanece nula. Así, en cualquier instante posterior, la circulación sobre cualquier curva cerrada es nula, puesto que sus partículas formaban una curva cerrada Γ_0 en el instante anterior t_0. Esto quiere decir que el flujo $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ sobre

cualquier curva en cualquier instante es independiente de la trayectoria; por lo tanto, $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$, un vector gradiente y rot $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

En consecuencia:

Si la vorticidad de un flúido se anula en cualquier instante, permanecerá nula de ahí en adelante.

70. Movimiento irrotacional. Hemos visto que, si las fuerzas del cuerpo sobre un flúido son conservativas y la densidad $\rho = \rho(p)$ o constante, la anulación de la vorticidad en cualquier instante implica su anulación en cualquier instante posterior. Entonces rot $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en el espacio y en el tiempo, y el movimiento se llama *irrotacional*. En cualquier porción simplemente conexa del flúido, $\mathbf{v}$ es un vector gradiente (45.8):

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi; \qquad y \qquad \varphi = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

se llama el *potencial de velocidad*.

La ecuación de continuidad (65.3) se convierte ahora en

$$\frac{d\rho}{dt} - \rho\,\nabla^2\varphi = 0. \tag{2}$$

Para un flúido incompresible, $d\rho/dt = 0$ y, por lo tanto, $\nabla^2\varphi = 0$. Entonces:

El potencial de velocidad de un flúido irrotacional y no compresible satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$.

La ecuación del movimiento (68.2) se reduce ahora a

$$\nabla\left(Q + P + \tfrac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \mathbf{0} \tag{3}$$

puesto que

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

ya que la diferenciación con respecto al tiempo local ($\mathbf{r}$ constante) y la derivación con respecto al espacio (t constante) son conmutativas. Entonces

$$Q + P + \tfrac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(t), \tag{4}$$

una función arbitraria del tiempo. Si, además, el flujo es uniforme, $\partial\varphi/\partial t = 0$ y

$$Q + P + \tfrac{1}{2}v^2 = \text{constante} \tag{5}$$

en el tiempo y en el espacio.

Las soluciones de la ecuación de Laplace se llaman *funciones armónicas* (§56). Toda función armónica φ representa un flujo irrotacional de un líquido cuya velocidad $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$. El problema consiste en encontrar un flujo que satisfaga las condiciones dadas.

Ejemplo. En un flujo con simetría central, φ debe ser función de r solamente; entonces, de (42.21)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0, \qquad r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = a, \qquad \varphi = b - \frac{a}{r}.$$

Ahora

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi = \frac{a}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

y el flujo por segundo a través de cualquier esfera de radio r y centro en O es constante: $4\pi r^2(a/r^2) = 4\pi a$. Cuando este flujo se da, a está determinado; el valor de b no tiene importancia puesto que no interviene en $\mathbf{v}$.

PROBLEMAS

1. Para el flujo radial $\mathbf{v} = (a/r^3)\mathbf{r}$ del Ej. 70, demostrar que el flujo normal a través de cualquier superficie cerrada con respecto al origen es constante e igual a $4\pi a$.

2. Un flujo tangencial de líquido entre los planos paralelos $y = 0$, $y = b$ está dado por $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$. Demostrar que su vorticidad $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\mathbf{k}$ y que $\mathbf{v}$ tiene un potencial vectorial $\mathbf{A} = \frac{1}{2}y^2\mathbf{k}$ para el cual div $\mathbf{A} = 0$.

Demuestre que la circulación sobre cualquier curva cerrada en el plano xy es numéricamente igual al área dentro de la curva.

3. Una masa de líquido se encuentra girando alrededor del eje z con una velocidad angular $f(r)\mathbf{k}$ donde r es la distancia perpendicular desde el eje. Si $\mathbf{R}$ es un vector unitario perpendicular al eje, demostrar que la velocidad del líquido es

$$\mathbf{v} = rf(r)\mathbf{k} \times \mathbf{R},$$

y que

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = [rf'(r) + 2f(r)]\mathbf{k}.$$

4. Si el movimiento del Prob. 3 es irrotacional, demuestre que

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{a}{r^2}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \frac{a}{r}\mathbf{k} \times \mathbf{R};$$

y que el potencial de velocidad (multiforme)

$$\varphi = b - a\theta \quad (a,\ b \text{ constantes}),$$

donde θ es el ángulo polar.

Para un líquido de densidad constante ρ bajo la acción de la gravedad solamente, demuestre que la presión está dada por

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} = \text{constante}.$$

5. Sean r, θ, z, coordenadas cilíndricas. En el *vórtice combinado de Rankine*, un líquido gira como un conjunto cuando $r \leqq a$ con velocidad angular constante $\omega_0\mathbf{k}$, pero irrotacionalmente con velocidad angular $(\omega_0 a^2/r^2)\mathbf{k}$ cuando $r \geqq a$. Demuestre que la velocidad

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \omega_0 r\, \mathbf{k} \times \mathbf{R}, & r \leqq a, \\ \dfrac{\omega_0 a^2}{r}\, \mathbf{k} \times \mathbf{R}. & r \geqq a, \end{cases}$$

tiene los potenciales:

$$\text{(vectorial)} \quad \mathbf{A} = -\tfrac{1}{2}\omega_0 r^2 \mathbf{k}, \qquad r \leqq a;$$
$$\text{(escalar)} \quad \varphi = -\omega_0 a^2 \theta, \qquad r \geqq a.$$

6. En el vórtice combinado de Rankine (Prob. 5), sea $z = z_a$ en la superficie superior libre. Demuestre que la superficie libre está dada por

$$z = z_a - \frac{\omega_0^2}{2g}(a^2 - r^2), \qquad r \leqq a,$$

$$z = z_a + \frac{\omega_0^2 a^2}{2g}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \qquad r \geqq a.$$

Demuestre también que el fondo del vórtice ($r = 0$) está a una distancia $\omega_0^2 a^2/g$ debajo del nivel general ($r = \infty$) del líquido.

7. Si la vorticidad es constante en todo un líquido incompresible, demostrar que $\nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$. [Cf. (40.12].

8. Si un líquido incompresible en un movimiento irrotacional ocupa una región simplemente conexa, demuestre que

$$\int v^2\, dV = \oint \varphi \frac{d\varphi}{dn}\, dS,$$

donde φ es el potencial de velocidad y que la derivada normal $d\varphi/dn$ está tomada externamente a la superficie que bordea.

9. Bajo las condiciones del Prob. 8, demostrar que, si

(a) $\varphi = \text{const}$ sobre el límite, o

(b) $d\varphi/dn = 0$ sobre el límite,

$\varphi = \text{const}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en toda la región.

Demuestre, en consecuencia, que el movimiento irrotacional de un líquido que ocupe una región simplemente conexa está determinado unívocamente cuando el valor ya sea de φ o de $d\varphi/dn$ está especificado en cada punto del límite.

10. Demuestre el *teorema de energía mínima de Kelvin*: El movimiento irrotacional ($\mathbf{v}$) de un flúido incompresible que está ocupando

una región simplemente conexa V con bordes finitos tiene menos energía cinética

$$E = \frac{1}{2}\rho \int v \cdot \mathrm{v}\, dV$$

que cualquier otro movimiento ($\mathbf{v}_1$) que satisfaga las mismas condiciones de límite.

[Póngase $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$; entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = \operatorname{div} \mathbf{v}_1 - \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ en el borde,}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Demuestre que $E_1 = E + E'$.]

71. Movimiento uniforme. Se dice que un flujo *uniforme* cuando es invariante en el tiempo. Entonces todas las derivadas locales con respecto al tiempo son nulas. Así, $\partial\rho/\partial t = 0$ y la ecuación de continuidad (65.1) es simplemente

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{1}$$

También $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$: *las líneas de corriente son también líneas de movimiento.* La ecuación de Euler (68.2) se convierte ahora en

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla(Q + P + \tfrac{1}{2}v^2). \tag{2}$$

Si $\mathbf{T}$ es una tangente unitaria a lo largo de una línea de corriente ($\mathbf{T} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$) o una línea de vórtice ($\mathbf{T} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$),

$$\mathbf{T} \cdot \nabla(Q + P + \tfrac{1}{2}v^2) = \frac{d}{ds}(Q + P + \tfrac{1}{2}v^2) = 0$$

a lo largo de una línea de corriente o de vórtice. Hemos entonces demostrado el

TEOREMA DE BERNOULLI. *En un flujo uniforme en el cual las fuerzas del cuerpo tienen un potencial Q y la densidad $\rho = \rho(p)$ o constante,*

$$Q + \int \frac{dp}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 = \text{constante} \tag{3}$$

a lo largo de cualquier línea de corriente o de vórtice.

La constante variará en general de una línea a otra. Sin embargo, si el movimiento es irrotacional a la vez que estacionario,

$$\nabla\left(Q + \int \frac{dp}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2\right) = 0,$$

$$Q + \int \frac{dp}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 = C, \tag{4}$$

una constante absoluta —la misma en todo el flúido.

Supongamos ahora que el líquido tiene una densidad constante ρ; esto es casi cierto para los líquidos. La ecuación de continuidad es

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{o} \quad \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\, dS = 0.$$

A lo largo de cualquier tubo cuya superficie esté compuesta por líneas de corriente, denotemos por A a la sección transversal normal. Si el tubo es suficientemente delgado, el flujo

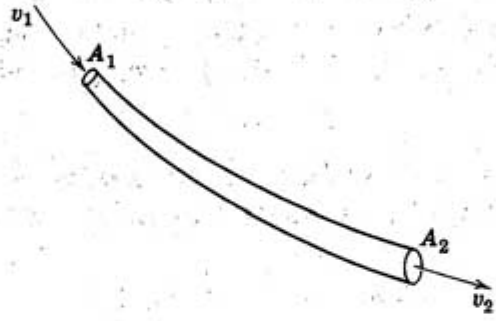


Fig. 71*a*. Flujo a través de un tubo delgado.

normal a través de una porción entre dos secciones A_1 y A_2 (Fig. 71*a*) es aproximadamente $v_2A_2 - v_1A_1 = 0$; entonces

$$vA = \text{constante} \tag{5}$$

es la ecuación de continuidad a lo largo de un tubo de flujo.

Si el líquido está sujeto solamente a fuerzas gravitacionales, su potencial es gz si el eje z apunta hacia arriba desde un plano de referencia horizontal. Así, con

$$Q = gz, \quad P = p/\rho,$$

tenemos

$$gz + \frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2 = \text{constante} \tag{6}$$

a lo largo de una línea de corriente. Si z, p, v tienen los valores z_0, p_0, v_0 en la sección A_0, tenemos de (6)

$$\rho g(z - z_0) + (p - p_0) + \tfrac{1}{2}\rho(v^2 - v_0^2) = 0. \tag{7}$$

Para un tubo delgado podemos tomar $vA = v_0A_0$, y (7) se convierte en

$$(8) \qquad p - p_0 = \rho g(z_0 - z) - \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 \left(\frac{A_0^2}{A^2} - 1\right).$$

Así, la presión es mínima en la parte más estrecha del tubo.

Ejemplo. Ley de Torricelli. Cuando un líquido sale de un orificio cercano al fondo de un recipiente que se conserva lleno a un nivel constante, el flujo puede tomarse como uniforme. Consideremos un tubo de corriente que se extienda desde el orificio de área A a la superficie superior donde su área es A_0 (Fig. 71*b*). En esta superficie p_0 es la presión atmosférica, y $v_0 = vA/A_0$; en el orificio $p = p_0$, y la velocidad del flujo hacia afuera es v. Con estos valores tenemos, de (7),

$$v^2(1 - A^2/A_0^2) = 2g(z_0 - z) = 2gh, \quad ..$$

donde h, es la distancia desde la superficie libre al orificio. Cuando A_0 es grande comparado con A, tenemos aproximadamente $v^2 = 2gh$, resultado que se conoce con el nombre de *ley de Torricelli.*

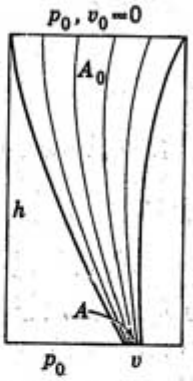


Fig. 71b. Flujo de salida de un tanque

72. Movimiento plano. Cuando el flujo es el mismo en todos los planos paralelos a un plano fijo (el plano xy) y la velocidad no tiene componente z, se dice que el movimiento es *plano.* La velocidad, la densidad y la presión son funciones solamente de x y de y; y

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

es normal al plano xy.

El flujo a través de cualquier curva C en el plano xy se define como el volumen de líquido que cruza por segundo un cilindro recto de altura unitaria con base en C. Para una persona que recorra la curva en el sentido en que crece s, el flujo que cruza C de derecha a izquierda es

$$(1) \qquad \int_C \mathbf{k} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}\, ds = \int_C \mathbf{v} \times \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r};$$

aquí $\mathbf{k}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ forman un conjunto dextrorso de vectores unitarios ortogonales (Fig. 72*a*).

En cualquier porción simplemente conexa del flúido, la integral de línea de $\mathbf{v} \times \mathbf{k}$ será independiente de la trayecto-

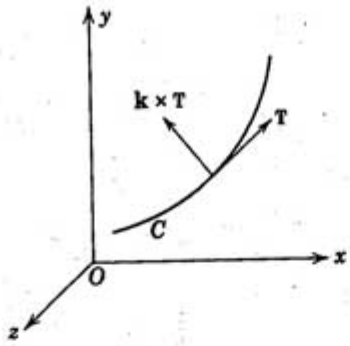


Fig. 72a. Flujo en una curva.

ria cuando rot $(\mathbf{v} \times \mathbf{k}) = 0$. De (41.7),

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{k}\,\text{div}\,\mathbf{v} = -\mathbf{k}\,\text{div}\,\mathbf{v};$$

entonces, para un flúido incompresible, (div $\mathbf{v} = 0$), el flujo (1) será independiente de la trayectoria entre los extremos. Así,

$$(2) \qquad \psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v} \times \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$$

define una función escalar de punto tal que

$$(3) \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{k} = \nabla\psi, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi \qquad \text{(Teorema 45.1).}$$

Puesto que $\nabla\psi$ es normal dondequiera y $\mathbf{v}$ es tangente dondequiera a las curvas $\psi = \text{const}$, estas curvas son las líneas de corriente del movimiento. Consecuentemente, a la función $\psi(\mathbf{r})$ se le llama *función de corriente.*

Si establecemos $\mathbf{g} = -\psi\mathbf{k}$, tenemos

$$(4) \qquad \text{rot}\,\mathbf{g} = \mathbf{k} \times \nabla\psi = \mathbf{v}, \qquad \text{div}\,\mathbf{g} = -\mathbf{k} \cdot \nabla\psi = 0;$$

así, la velocidad tiene el potencial vectorial $-\psi\mathbf{k}$ (§54).

De (41.7) tenemos

$$(5) \qquad \text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot}\,(\mathbf{k} \times \nabla\psi) = \mathbf{k}\,\text{div}\,\nabla\psi = \mathbf{k}\nabla^2\psi.$$

En consecuencia: *el movimiento plano de un flúido incompresible será irrotacional cuando y sólo cuando la función de corriente sea armónica:* $\nabla^2\psi = 0$. Cuando rot $\mathbf{v} = 0$, la velocidad tiene un potencial escalar φ, $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$; y, puesto que

$$\nabla^2\varphi = -\text{div}\,\mathbf{v} = 0,$$

el potencial de velocidad es también armónico.

De

$$(6) \qquad \mathbf{v} = -\nabla\varphi = \mathbf{k} \times \nabla\psi,$$

tenemos las relaciones

$$(7) \qquad \nabla\varphi = (\nabla\psi) \times \mathbf{k}, \qquad \nabla\psi = \mathbf{k} \times \nabla\varphi;$$

o, en términos de coordenadas rectangulares,

$$\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Así, (7) es equivalente a las ecuaciones

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8}$$

Pero éstas son precisamente las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* que conectan las partes real e imaginaria de la función analítica

$$w=\varphi+i\psi \tag{9}$$

de la variable compleja $x+iy$. † Hemos entonces demostrado el importante

TEOREMA. *En cualquier movimiento plano e irrotacional de un flúido incompresible, el potencial de velocidad φ y la función de corriente ψ son dos funciones armónicas que se combinan en una función analítica $\varphi+i\psi$ de una variable compleja $x+iy$.*

Puesto que $-\psi+i\varphi=i(\varphi+i\psi)$, vemos que, si $\varphi+i\psi$ es analítica, $-\psi+i\varphi$ también lo es; consecuentemente, si φ y ψ son el potencial de velocidad y la función de corriente para un flujo plano irrotacional, $-\psi$ y φ son las funciones correspondientes para otro flujo de este tipo.

De (7), tenemos que $\nabla\varphi\cdot\nabla\psi=0$: las líneas de corriente ($\psi=$ const) cortan a las líneas equipotenciales ($\varphi=$ const) en ángulo recto.

Puesto que el *potencial complejo* $w=\varphi+i\psi$ es una función analítica de z,

$$w'=\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y};\dagger$$

o, puesto que la velocidad tiene las componentes

$$v_x=-\mathbf{i}\cdot\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y=-\mathbf{j}\cdot\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$w'=-v_x+iv_y, \qquad -\overline{w}'=v_x+iv_y, \tag{10}$$

† *Advanced Calculus*, §197.

donde $\overline{w}'$ denota el conjugado de w'. Así, la velocidad en cualquier punto está dada por el vector complejo $-\overline{w}'$; su magnitud es $|w'|$:

$$\text{(11)} \qquad \mathbf{v} \sim -\operatorname{conj}\frac{dw}{dz}, \qquad |\mathbf{v}| = \left|\frac{dw}{dz}\right|.$$

Ejemplo 1. Supongamos el potencial complejo $w = az^n$ (a real); entonces, si escribimos $z = re^{i\theta}$,

$$w = ar^n e^{in\theta} = ar^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta);$$

$$\varphi = ar^n \cos n\theta, \qquad \psi = ar^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Las líneas de corriente son las curvas cuyas ecuaciones polares son $r^n \operatorname{sen} n\theta = \text{const}$.

Para los casos $n = 1, 2, -1$, ponemos $z = x + iy$, usando coordenadas rectangulares.

(*a*) $$n = 1: \qquad w = az = ax + iay.$$

Las líneas de corriente son las líneas $y = \text{const}$ y el flujo tiene la velocidad constante $-\overline{w}' = -a$ en la dirección de $-x$.

(*b*) $$n = 2: \qquad w = az^2 = a(x^2 - y^2) + i\,2axy.$$

Las líneas equipotenciales y de corriente son las dos familias de hipérbolas equiláteras

$$x^2 - y^2 = \text{constante}, \qquad xy = \text{const}.$$

Puesto que la línea de corriente $xy = 0$ puede ser tomada como las mitades positivas del eje x y del eje y, éstas pueden ser consideradas como límites fijos y el movimiento como un flujo uniforme de líquido en el ángulo entre dos paredes perpendiculares. La velocidad en cualquier punto es $-\overline{w}' = -2\overline{az}$; su magnitud varía directamente en razón de la distancia al origen.

(*c*) $$n = -1: \qquad w = a/z = a(x - iy)/(x^2 + y^2).$$

Las líneas equipotenciales y de corriente son dos familias de círculos:

$$x/(x^2 + y^2) = \text{const}, \qquad y/(x^2 + y^2) = \text{const},$$

tangentes al eje y y al eje x, respectivamente, en el origen. La velocidad $-\overline{w}' = a/\overline{z}^2$ se vuelve infinita en el origen.

Ejemplo 2. Con el potencial complejo,

$$w = V\left(z + \frac{a^2}{z}\right) = V(re^{i\theta} + a^2 r^{-1} e^{-i\theta}), \qquad (V \text{ real}),$$

$$\varphi = V\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \qquad \psi = V\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta.$$

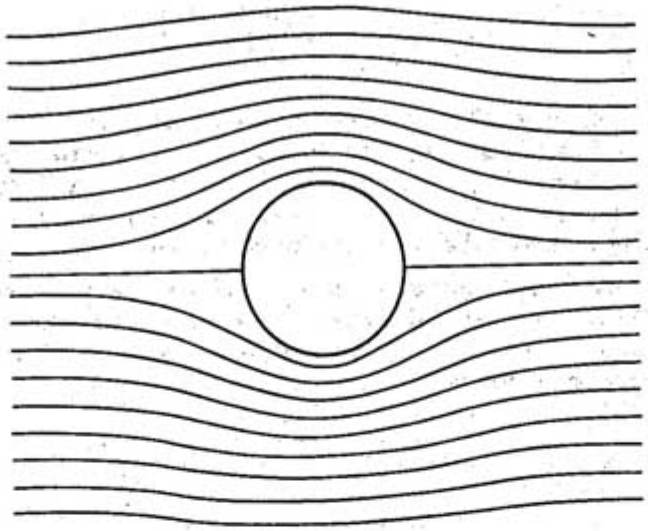


Fig. 72*b*. Flujo alrededor de un cilindro.

La línea de corriente $\psi = 0$ incluye al círculo $r = a$ y al eje x en $\theta = 0$. Puesto que $w' = V(1 - a^2/z^2)$, la velocidad compleja

$$-\overline{w}' = -V\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \to -V \quad \text{as} \quad z \to \infty.$$

Entonces, podemos considerar al movimiento como un flujo hacia la izquierda alrededor de un obstáculo cilíndrico infinito de radio a (Fig. 72*b*). A gran distancia del obstáculo, el flujo tiene una velocidad sensiblemente uniforme $-Vi$.

Cuando se desprecian las fuerzsa del cuerpo, la ecuación de Bernoulli (71.6) da $p/\rho + \frac{1}{2}v^2 = \text{const}$. De la simetría del flujo con respecto al cilindro, es claro que la presión total ejercida por el flúido sobre el cilindro es nula.

PROBLEMAS

1. Cuando el movimiento de un líquido incompresible es uniforme, dedúzcase de la ecuación de Helmholtz (68.5) que $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}$.

2. Un gas fluye de un recipiente, en el que la presión y la densidad son p_0, ρ_0, en un espacio donde la presión es p. Si la expansión tiene lugar adiabáticamente, $p/\rho = \text{const}$, donde γ es la razón de los calores específicos, demostrar que

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0}\right).$$

Despreciando las fuerzas del cuerpo y la velocidad del gas dentro del recipiente, demostrar que la velocidad de eflujo cuando el movimiento se hace uniforme está dada por $P + \frac{1}{2}v^2 = 0$; de aquí

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]$$

3. En el ejemplo 72.1 considérese el movimiento cuando $n = \pi/\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$. Puesto que las rectas $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ son partes de la misma línea de corriente $\psi = 0$, tenemos el movimiento irrotacional uniforme de un líquido entre dos paredes formando un ángulo α. Encontrar las componentes radial y transversal de $\mathbf{v}$ en cualquier punto (r, θ).

4. Discutir el movimiento irrotacional plano cuando el potencial complejo $w = \varphi + i\psi$ está dado por $z = \cosh w$. Demostrar que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente son las familias de elipses e hipérbolas confocales:

$$\frac{x^2}{c^2\cosh^2\varphi} + \frac{y^2}{c^2\operatorname{senh}^2\varphi} = 1,$$

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\psi} - \frac{y^2}{c^2\operatorname{sen}^2\psi} = 1$$

con focos en $(\pm c, 0)$.

Demostrar que las líneas de corriente $\psi = n\pi$, donde n es cualquier entero positivo, corresponden a la parte del eje x desde $x = \pm c$ hasta $x = \pm\infty$. Si tomamos esto como una pared, tenemos el caso de un líquido brotando de una ranura de manantial de anchura $2c$ en un plano infinito.

73. Mecánica de los flúidos. Como la mecánica ordinaria, ésta tiene su cinemática y su dinámica. El principio básico de la cinemática es la *ecuación de continuidad*, que es simplemente una expresión de la conservación de la masa. La dinámica de los flúidos puede estudiarse de dos maneras. La que se adopta aquí es el método *euleriano* o *estadístico*. En él se trata de encontrar la velocidad, la densidad y la presión del flúido como funciones del tiempo y de la posición; las variables independientes son $\mathbf{r}$ y t. En el otro método, el *Lagrangiano* o *histórico*, el movimiento de las partículas de flúido independientes se sigue desde sus posiciones iniciales $\mathbf{r}_0$ hasta su posición $\mathbf{r}$ después de transcurrido un tiempo t. Así, se traza la historia de cada partícula. En cualquier función $f(\mathbf{r})$ asociada a una partícula de flúido, $\mathbf{r}$ es una función de las variables independientes $\mathbf{r}_0$ y t. Este plan lleva a más complicaciones y a cálculos más difíciles y por esa razón no se presenta aquí; pero las ideas básicas y los resultados se dan en el libro más extenso de Brand, *Vector and Tensor Analysis*. El método lagrangiano está especialmente adaptado para seguir la historia de las curvas y las superficies compuestas de partículas de flúido.

Más aún, lleva a una integral simple de la ecuación de vórtice de Helmholtz.

Volviendo al método euleriano aplicado a flúidos perfectos (o no viscosos), encontramos primero, por el principio de d'Alembert que, en cualquier punto dentro del flúido, la presión, normal a cualquier elemento de su perficie, es la misma en todas las direcciones. Si $F(\mathbf{r}, t)$ es cualquier función, vectorial o escalar, asociada a una partícula de flúido que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$, su *relación esencial* de cambio es

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F,$$

donde $\partial F/\partial t$ es la relación local de cambio. La ecuación euleriana de continuidad es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

y, para un flúido incompresible ($d\rho/dt = 0$), se convierte en $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. La ecuación dinámica de Euler, también deducida del principio de d'Alembert, es

$$(E) \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(Q + P), \qquad P = \int \frac{dp}{\rho},$$

cuando las fuerzas del cuerpo tienen un potencial Q y la densidad es una función solamente de p. De esto podemos deducir la ecuación de Helmholtz para la *vorticidad* $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

De esta ecuación puede demostrarse que, si la vorticidad del flúido se anula en cualquier instante, permanecerá nula posteriormente. Sin embargo, demostramos primero, el teorema de circulación de Kelvin:

La circulación sobre una curva cerrada que se mueve con el flúido es constante,

para establecer este resultado.

Para el movimiento *irrotacional* ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, la velocidad se deriva de un potencial

$$\mathbf{v} = -\nabla \varphi,$$

y la circulación $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sobre cualquier curva reducible.

La ecuación (E) de Euler se convierte ahora en

$$Q + P + \frac{1}{2} v^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t),$$

una arbitraria función de t.

Para el movimiento uniforme $(\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0})$, la ecuación (E) transforma en

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla(Q + P + \tfrac{1}{2} v^2);$$

de donde el *teorema de Bernoulli:*

$$Q + P + \tfrac{1}{2} v^2 = \text{constante}$$

a lo largo de una línea de corriente o de vórtice, y esta constante es absoluta si el movimiento plano uniforme es también irrotacional.

Para el *movimiento plano* de un flúido incompresible, la integral inedependiente de la trayectoria

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \mathbf{v} \times \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \qquad (\mathbf{k} \perp \text{plano})$$

define la *función de corriente.* Las curvas $\psi = \text{const.}$ son líneas de corriente $(\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0})$.

Para el *movimiento plano irrotacional,* tanto la función de corriente como el potencial de velocidad son armónicas: $\nabla^2 \psi = 0$, $\nabla^2 \varphi = 0$. Entonces $\nabla \psi = \mathbf{k} \times \nabla \varphi$; y esta es la forma vectorial de las ecuaciones de Cauchy-Riemann que garantizan que $w = \varphi + i\psi$ es una función analítica de $x + iy$. El *potencial complejo* w, tiene por lo tanto una derivada única dw/dz; y el vector velocidad compleja

$$v = - \text{ conjugado de } dw/dz.$$

Capítulo 8

Electrodinámica

74. Ecuaciones de Maxwell. Una distribución de cargas eléctricas y corrientes en el espacio da origen a un *campo electromagéntico.* Este campo puede caracterizarse por medio de cuatro vectores:

E, la *intensidad eléctrica* (fuerza del campo eléctrico),

H, la *intensidad magnética* (fuerza del campo magnético),

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, la *densidad del flujo eléctrico* (desplazamiento eléctrico),

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, la *densidad del flujo magnético* (inducción magnética);

los términos entre paréntesis se usan también ampliamente. Las relaciones lineales $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, son válidas solamente en el caso de medios isotrópicos (cuyas propiedades son independientes de la dirección). En los medios no isotrópicos, tales como los cristales, ε y μ pueden considerarse como diádicas simétricas que transforman **E** y **H** en **D** y **B**. Más aún, para substancias ferromagnéticas, tales como el hierro, el cobalto y el níquel, la relación $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ no se aplica; y, como una complicación más, **B** depende de la historia pasada del cuerpo.

Si el medio es homogéneo a la vez que isotrópico, ε y μ son constantes; entonces ε se llama la *permitividad* (o *constante dieléctrica*) y μ la *permeabilidad* del medio. En el espacio libre, estas constantes se denotan con ε_0 y μ_0.

En la vecindad de un *punto ordinario* del espacio, las propiedades del medio son continuas. Asumimos también que los cuatro vectores del campo son finitos dondequiera, y, en todos los puntos ordinarios son funciones derivables y continuas de

posición y de tiempo. Como postulados fundamentales de la electrodinámica suponemos que los vectores del campo satisfacen las *ecuaciones de Maxwell:*

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \tag{2}$$

en todos los puntos ordinarios, donde el vector $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente.

Si ρ denota la densidad volumétrica de la carga eléctrica, la carga total q (*cantidad* de electricidad) interior a una superficie cerrada S es la integral de volumen

$$q = \int \rho \, dV, \tag{3}$$

en la región V interior a S. Para definir la densidad de corriente en un punto P, considérese una superficie que pase por P y que sea normal a las líneas de corriente de flujo; entonces $\mathbf{J}$ tiene la dirección de la corriente en P y magnitud igual a la carga neta que atraviesa una área unitaria de la superficie por P en una unidad de tiempo. Tanto ρ como $\mathbf{J}$ son los límites de los promedios; y, si $\mathbf{v}$ es la velocidad promedio de las cargas cerca de P, podemos escribir $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$.

Si S es una superficie bilateral y $\mathbf{n}$ su normal unitaria apuntando del lado 1 al lado 2, entonces la corriente que fluye por S de 1 a 2 es

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS. \tag{4}$$

Si S es una superficie *cerrada* con la normal externa $\mathbf{n}$, la corriente total que pasa hacia *afuera* por S es

$$\oint \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \text{div } \mathbf{J} \, dV$$

por el teorema de divergencia. Ahora la carga q dentro de S está también disminuyendo a la razón

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV.$$

Igualando estas expresiones tenemos

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} \right) dV = 0;$$

y, puesto que esta ecuación es válida para cualquier S que se tome,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \tag{5}$$

si el miembro izquierdo es continuo. Esta ecuación expresa la conservación de la carga eléctrica. Si ponemos $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, (5) tiene exactamente la misma forma que la ecuación de continuidad (65.1) de la hidrodinámica. Nos referiremos, por lo tanto, a (5), como la *ecuación de continuidad.*

Tomando la divergencia de las ecuaciones (1) y (2), tenemos

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

de (5). Puesto que podemos conmutar el operador espacial div con $\partial/\partial t$, estas ecuaciones se convierten en

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) = 0.$$

Así, div **B** y div **D** $- \rho$ son constantes en el tiempo; y, si en la historia del campo estas ecuaciones han sido siempre nulas, deben, en consecuencia, seguir siendo nulas. Añadimos entonces a las ecuaciones postuladas (1) y (2) otras dos,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \tag{7}$$

El conjunto de las ecuaciones (1), (2), (6), (7) se llama usualmente *ecuaciones de Maxwell.*

Si S es cualquier superficie cerrada encerrando una región en la cual **B** y **D** sean continuas, tenemos, por el teorema de divergencia,

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0, \tag{8}$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int \rho\, dV = q, \tag{9}$$

donde q es la carga encerrada por S. Si **B** y **D** cambian muy rápidamente, pero de manera continua, en las superficies que

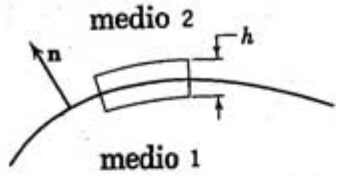


Fig. 74. Superficie de separación de dos medios.

limitan a los cuerpos, estas ecuaciones son válidas cuando S incluye medios diferentes. Matemáticamente, sin embargo, es más conveniente considerar a **B** y a **D** como *discontinuas* en tales límites y postular la verdad de (8) y (9) en general. Entonces, si aplicamos estas ecuaciones a una "caja de píldoras" (Fig. 74) de altura h, con la base en un medio 1 y la otra en un medio 2, y tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{10}$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \omega, \tag{11}$$

donde **n** es una normal unitaria a la superficie límite en la dirección 1-2 y ω es la densidad de la carga de superficie (coulombs por metro cuadrado). Así, la componente normal de **B** es continua sobre una superficie límite; pero la componente normal de **D** tiene un salto finito igual a la densidad de carga local de la superficie.

75. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell. Sea S una superficie contenida dentro de una curva cerrada C. Entonces, si S y C satisfacen los requisitos del teorema de Stokes (§50), podemos expresar las ecuaciones de campo

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{74.1}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{74.2}$$

en forma de integrales tomando integrales de superficie sobre S y transformando los miembros izquierdos por medio del teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS, \tag{3}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{4}$$

La segunda integral en (4),

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = I \qquad (74.4),$$

la corriente total que pasa por S en la dirección de $\mathbf{n}$. Más aún, si C y S son fijos, la operación $\partial/\partial t$ puede realizarse en toda la integral. Obtenemos entonces

$$(5) \qquad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

$$(6) \qquad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

como equivalentes integrales de las ecuaciones de campo.

La integral

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

se llama el *flujo magnético* a través de S. Puesto que div $\mathbf{B} = 0$, el teorema de divergencia muestra que Φ es la misma para todas las superficies contenidas dentro de C; y

$$(5)' \qquad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

es la

LEY DE LA INDUCCIÓN, de Faraday. *La Razón de decrecimiento con respecto al tiempo del flujo magnético en una curva cerrada es igual a la circulación de la intensidad eléctrica* $\mathbf{E}$ *en la misma curva.* †

La derivada parcial en (5) implica un flujo cuya densidad $\mathbf{B}$ varía con el tiempo, pero que está ligada con un perímetro fijo. Pero los experimentos de Faraday han mostrado que la ley de inducción es válida aun cuando Φ se cambie al variar el perímetro; y para expresar este hecho, (5) se escribe como

$$(5)'' \qquad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Para un campo estacionario $\partial \mathbf{D}/\partial t = \mathbf{0}$, y, de (4) o de (6), tenemos

$$(7) \qquad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I.$$

† Como en el teorema de Stokes, la circulación es a la derecha con respecto a $\mathbf{n}$.

Esta ecuación establece la

LEY DE AMPERE: *La corriente de conducción abrazada por un circuito es igual a la circulación de la intensidad magnética* **H** *con respecto a la curva.*

En general, cuando **D** es variable, (4) puede escribirse

$$(4)' \qquad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}') \cdot \mathbf{n}\, dS \quad \text{donde} \quad \mathbf{J}' = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Así, el vector **D** contribuye al campo magnético con una porción que sería producida por una corriente de conducción de densidad $\partial \mathbf{D}/\partial t$. Por esta razón Maxwell llamó a $\partial \mathbf{D}/\partial t$ la densidad de la "corriente de desplazamiento" y a **D** el "desplazamiento eléctrico".

76. Ley de Ohm. La densidad de corriente **J** en un líquido o sólido se relaciona con la fuerza del campo eléctrico **E** mediante la ley de Ohm:

$$(1) \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

donde el número σ se llama la *conductividad* del medio. Todos los cuerpos conducen electricidad hasta cierto grado, pero la conductividad σ (mhos por metro), de diversos materiales cubre una enorme cantidad de valores; así, para el cuarzo fundido $\sigma = 10^{-17}$ aproximadamente, mientras que para la plata $\sigma = 6.1 \times 10^7$. Entre estos dos valores tenemos $\sigma \simeq 10^{-4}$ para el agua destilada y $\sigma \simeq 4$ para el agua de mar.

Para una corriente constante

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (74.5)$$

El teorema de divergencia muestra ahora que la integral de superficie de **J** sobre cualquier tubo delgado formado por líneas de corriente entre las secciones normales A_1 y A_2 es nula:

$$\oint_1^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}\, dS = A_2 J_2 - A_1 J_1 = 0;$$

así, la corriente $I = AJ$ a través de cualquier sección es la misma. Ahora, a lo largo de cualquier línea de corriente l,

$$A\mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} = I\, ds,$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} = I \int_0^l \frac{1}{\sigma A}\, ds. \tag{2}$$

El factor

$$R = \int_0^l \frac{1}{\sigma A}\, ds \tag{3}$$

se llama *resistencia* del conductor entre los puntos 1 y 2. Así, la resistencia de un alambre homogéneo de longitud l y sección uniforme A está dada por

$$R = \frac{l}{\sigma A}; \tag{4}$$

y $1/\sigma$ se llama la *resistividad*. La ecuación (2) puede escribirse ahora

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = RI.$$

Para corrientes *continuas*, $\partial \mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0}$, y (74.1) da rot $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, donde φ es el potencial escalar, y la última ecuación se convierte en

$$\varphi_1 - \varphi_2 = RI. \tag{5}$$

La diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ se escribe V y se llama la *fuerza electromotriz* (fem) entre los puntos; y $V = RI$ es la forma familiar de la ley de Ohm.

En un conductor homogéneo σ es constante, entonces, de (1),

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E},$$

y la ecuación de continuidad (74.5) se convierte en

$$\sigma \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Pero, puesto que $\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ de (74.7), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0.$$

Si $\rho = \rho_0$ cuando $t = 0$, su solución

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t} \tag{6}$$

muestra que dentro de un conductor la carga decae exponencialmente con el tiempo. El tiempo $\tau = \varepsilon/\sigma$ requerido para que la carga ρ_0 decaiga hasta ρ_0/e se llama el *tiempo de relajación* del conductor. Aún para conductores pobres τ es muy pequeño; así, para el agua destilada τ es menor de un millonésimo de segundo. Sin embargo, para los buenos aislantes τ puede tomar valores grandes.

Si el cuerpo conductor está dentro de un medio aislante, la carga total del conductor debe conservarse. El decaimiento de la carga interior produce un rápido flujo de corrientes hacia la superficie exterior del conductor, donde será contrarrestado por la conductibilidad tan pequeña del aislante. Así, las cargas en los conductores aparecen casi inmediatamente como cargas de superficie.

77. Unidades y dimensiones. Cuando se escogen el metro, el kilogramo y el segundo como unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo, la unidad de fuerza, el *newton*, acelerará un kilogramo, un metro por segundo por segundo; así,

$$1 \text{ newton} = 10^3 \times 10^2 \text{ dinas} = 10^5 \text{ dinas}.$$

La unidad de trabajo, o energía, el joule (julio), es el trabajo realizado por 1 newton que actúe en un metro; entonces

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ newton-metro} = 10^7 \text{ ergs}.$$

La unidad de potencia, el *watt*, es el trabajo efectuado a la razón de 1 joule por segundo; así,

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ joule por segundo} = 10^7 \text{ ergs por seg}.$$

Las dimensiones de la fuerza ($\mathbf{F}$), trabajo (W) y potencia (P) son

$$[F] = MLT^{-2},$$
$$[W] = ML^2T^{-2},$$
$$[P] = ML^2T^{-3}.$$

Añadiendo una cuarta unidad eléctrica al metro, kilogramo y segundo, obtenemos el sistema mks de Giorgi, que encontró gran aceptación en la electrotécnica debido a que conduce naturalmente a las unidades eléctricas "prácticas". Daremos aquí el sistema mks aumentado con el coulomb, † la unidad de car-

† El coulomb internacional es la carga transportada por una corriente de un ampere en un segundo. El couloumb internacional depo-

ga; su símbolo dimensional es Q. Las dimensiones de las cantidades electromagnéticas pueden entonces ser expresadas en función de M, L, T y Q.

Un campo eléctrico ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una carga de punto q proporcional a q. La fuerza del campo $\mathbf{E}$ se define por la ecuación

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}; \tag{1}$$

esto es, $\mathbf{E}$ es fuerza en newtons por coulomb. Las dimensiones de $\mathbf{E}$ son, por lo tanto,

$$[E] = MLT^{-2}Q^{-1}.\dagger$$

Las dimensiones de todas las demás cantidades electromagnéticas se deducen ahora de las ecuaciones de Maxwell. Notando que

$$[\rho] = L^{-3}Q,$$
$$[I] = T^{-1}Q,$$
$$[J] = [I]L^{-2} = L^{-2}T^{-1}Q,$$

tenemos, de (74.2) y (74.7)

$$[H] = [J]L = L^{-1}T^{-1}Q,$$
$$[D] = [\rho]L = L^{-2}Q,$$
$$[\varepsilon] = [D/E] = M^{-1}L^{-3}T^{2}Q^{2}.$$

Ahora, de (74.1),

$$[B] = [E]L^{-1}T = MT^{-1}Q^{-1},$$
$$[\mu] = [B/H] = MLQ^{-2}.$$

Puesto que $[\varepsilon\mu] = L^{-2}T^{2}$, $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ tiene las dimensiones de la velocidad:

$$[1/\sqrt{\varepsilon\mu}] = LT^{-1}.$$

Más aún, $\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}$ y $\sqrt{\mu}\mathbf{H}$ tienen las mismas dimensiones; de hecho

$$[\varepsilon E^{2}] = [\mu H^{2}] = ML^{-1}T^{-2},$$

---

sita plata de una solución de nitrato de plata a razón de 1.11800×10^{-6} kg por seg.

† Aquí $E = |\mathbf{E}|$; similarmente H, D, B, J, denotan las magnitudes de $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$.

las dimensiones de la densidad de energía: ML^2T^{-2}/L^3. Así, vemos que

$$w = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \tfrac{1}{2}\mu H^2 \tag{2}$$

puede interpretarse como la energía por unidad de volumen (joules por metro cúbico) del campo electromagnético.

Para la conductividad tenemos, de (76.1),

$$[\sigma] = [J/E] = M^{-1}L^{-3}TQ^2.$$

Así, $\tau = \varepsilon/\sigma$ en (76.6) tiene las dimensiones del tiempo y se llama *tiempo de relajación* del medio, puesto que, de (76.6) vemos que una carga ρ_0 decaerá hasta ρ_0/e en el tiempo τ.

En el sistema mks las unidades de las cantidades eléctricas son precisamente las unidades prácticas que se usan en la tecnología. Así, la unidad de corriente I, o coulomb por segundo, es el *ampere*. La unidad de fuerza electromotriz V (o diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$) se llama *volt;* y, de $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ tenemos

$$[V] = [E]L = ML^2T^{-2}Q^{-1}.$$

La unidad de resistencia es el *ohm;* y, de (76.5),

$$[R] = [V/I] = ML^2T^{-1}Q^{-2}.$$

La unidad de *flujo magnético* $\Phi = \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}\, dS$ se llama *weber;* y

$$[\Phi] = [B]L^2 = ML^2T^{-1}Q^{-1}.$$

Así, B, la densidad de flujo magnético se expresa en *webers* por metro cuadrado.

Las dimensiones de la *capacidad* C, definida en 84, son

$$[C] = [q/V] = M^{-1}L^{-2}T^2Q^2;$$

su unidad es el *farad* (coulombs por volt). La *inductancia* $\mathscr{L}$ † es el flujo magnético en webers por ampere a través de una superficie que contenga una corriente cerrada I; entonces

$$[\mathscr{L}] = [\Phi/I] = ML^2Q^{-2},$$

y su unidad es el *henry* (webers por ampere). Las dimensiones de ε y de μ dadas arriba muestran que

† Usamos $\mathscr{L}$ en vez de L, el símbolo usual, para evitar confundirlo con la longitud.

$$[\varepsilon] = [C/L], \qquad [\mu] = [\mathscr{L}/L];$$

por lo tanto, las unidades de ε y de μ son *farads por metro* y *henrys por metro.*

Una tabla sistemática de cantidades, mecánicas y eléctricas, se da al final del libro. Esta tabla debe usarse para comprobar cualquier fórmula racional en física, puesto que

(i) todos los términos aditivos deben tener las mismas dimensiones en M, L, T y Q; y

(ii) los argumentos de todas las funciones no algebraicas (como el seno, la exponencial y la logarítmica), deben ser no dimensionales.

PROBLEMAS

1. Derivar las dimensiones de **D**, **H** y $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell (74.1-2) solamente.

2. Encontrar las dimensiones de γ, la constante de gravitación (§61). Comprobar la tercera ley de Kepler (61.7) por dimensiones.

3. Comprobar la ecuación de Bernoulli (71.4) por dimensiones.

Comprobar la tercera ley de Kepler (61.7) por dimensiones.

5. En el Prob. 59.9, encontrar las dimensiones de a, b, γ, **A**, **B**, **C**.

78. Ecuación de onda. En un medio en el cual ε y μ sean constantes y $\rho = 0$, las ecuaciones del campo electromagnético pueden escribirse así:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0},$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu\sigma\mathbf{E},$$

$$\text{(3) (4)} \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Si tomamos el rotacional de (1) y eliminamos a rot **B** por medio de (2),

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

De una manera análoga, la eliminación de **E** da

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Ahora, de (40,12), tenemos

en vista de (3) y (4). Entonces, tanto **E** como **B** satisfacen la misma ecuación de propagación:

$$\nabla^2\mathbf{F} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

El último término, que representa una disipación de energía, es nulo en un medio aislante para el cual $\sigma = 0$; entonces (5) se convierte en la *ecuación de onda:*

$$\nabla^2\mathbf{F} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \tag{6}$$

para una velocidad de propagación $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

En §77 vimos que las ecuaciones de Maxwell implicaban que $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ tenía las dimensiones LT^{-1} de la velocidad. Ahora bien, la experimentación ha demostrado que en el espacio libre

$$\varepsilon_0 \simeq (1/36\pi)10^{-9} = 8.85525 \times 10^{-12} \text{ farad por metro,}$$

$$\mu_0 = (4\pi)10^{-7} = 1.25664 \times 10^{-6} \text{ henry por metro;}$$

y, entonces, la velocidad de propagación es

$$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2.99776 \times 10^8 \simeq 3 \times 10^8 \text{ metros por segundo.}$$

Dentro de los límites del error experimental, esta es la velocidad de la luz en el espacio libre. Así, los vectores del campo **E** y **B** (y también **D** y **H**), se propagan en el espacio libre con la velocidad de la luz.

79. Ley de Coulomb. Si integramos la ecuación

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \tag{74.7}$$

sobre el volumen dentro de una superficie cerrada S y aplicamos el teorema de divergencia, tenemos

$$\oint \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int \rho\,dV = q \tag{1}$$ (74.9),

donde q es la carga total contenida por S. Este resultado se conoce como

TEOREMA DE GAUSS. *La integral de superficie del desplazamiento eléctrico* **D** *sobre cualquier superficie cerrada es igual a la carga contenida.*

En un medio homogéneo e isotrópico la permitividad ε es constante, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, y (1) se convierte en

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{q}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Si el campo $\mathbf{E}$ se debe a una carga de punto q_1 en O, entonces debe tener simetría radial con respecto a O; en consecuencia $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{R}$ donde $\mathbf{R}$ es un vector unitario radial que parte de O. Si la superficie cerrada es una esfera de radio r, $\mathbf{n} = \mathbf{R}$ y (2) se convierte en

$$\oint E(r)\,dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1}{\varepsilon},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1}{r^2}\mathbf{R}. \tag{3}$$

Una carga de q_2 coulombs a una distancia de r metros desde O experimentará ahora una fuerza $\mathbf{F} = q_2\mathbf{E}$ (77.1), o

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{R} \quad \text{newtons}, \tag{4}$$

debida al campo $\mathbf{E}$. Si $q_1 q_2 > 0$, la carga q_2 será repelida y $\mathbf{F}$ tendrá la dirección de $\mathbf{R}$. La ecuación (4) es la *ley de Coulomb*. De la misma manera que la ley de gravitación es una ley del inverso del cuadrado; pero las cargas son repelidas o atraídas de acuerdo con que tengan el mismo signo o signos opuestos.

Si escribimos (3) en la forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\nabla r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right),$$

vemos que el campo de una carga de punto q tiene el potencial

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}. \tag{5}$$

Suponemos que $\mathbf{E}$, debido a n cargas de punto $q_1, q_2, \cdots, q_n$, es la suma $\Sigma\mathbf{E}_i$ de sus intensidades separadas: entonces

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \cdots + \frac{q_n}{r_n}\right), \tag{6}$$

donde r_i es la distancia desde la carga q_i al punto P donde se calcula $\mathbf{E}$. Consecuentemente el potencial debido a este sistema de cargas es

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \cdots + \frac{q_n}{r_n}\right). \tag{7}$$

El potencial en P debido a una carga $-q$ en Q y $+q$ en Q' es

$$\frac{-q}{r} + \frac{q}{r'} = q\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right).$$

Si $Q' \to Q$, y al mismo tiempo el producto

$$q\,\overrightarrow{QQ'} = \mathbf{m}$$

permanece constante, el resultado límite se llama un *dipolo de momento* $\mathbf{m}$. El potencial de este dipolo en P es

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\lim_{Q'\to Q} q(QQ')\frac{1/PQ' - 1/PQ}{QQ'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\mathbf{m}\cdot\nabla_Q\frac{1}{r}; \tag{8}$$

puesto que el límite de la fracción en el segundo miembro es la derivada direccional de $1/PQ$ en Q en la dirección $\overrightarrow{QQ'}$.

Para una distribución de carga continua de densidad ρ sobre un volumen V, (7) nos sugiere el potencial

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r}\,dV \tag{9}$$

en los puntos al exterior de V. Análogamente, para una distribución de carga de densidad de superficie ω sobre una superficie S,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\omega}{r}\,dS. \tag{10}$$

Una distribución continua de dipolos sobre una superficie con momentos en la dirección de la normal unitaria $\mathbf{n}$ en cualquier parte, se llama *doble capa*. Si $\tau\mathbf{n}$ es el momento de dipolo por unidad de área sobre la superficie S, el potencial en P de esta doble capa, sugerido por (8), es

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \tau\mathbf{n}\cdot\nabla_Q\frac{1}{r}\,dS, \tag{11}$$

donde $r = PQ$. De (52.8)

$$-\mathbf{n}\cdot\nabla_Q\frac{1}{r}\,dS = d\Omega,$$

el ángulo sólido subtendido por dS en P; entonces (11) puede escribirse como

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \tau\, d\Omega. \tag{12}$$

Cuando τ es constante sobre S, esto se convierte en

$$\varphi = -\frac{\tau\Omega}{4\pi\varepsilon}, \tag{13}$$

donde Ω es el ángulo sólido total subtendido por S en P.

80. Vector de Poynting. Si multiplicamos escalarmente las ecuaciones de Maxwell,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \tag{2}$$

por $\mathbf{H}$ y $\mathbf{E}$, respectivamente, y restamos, entonces obtenemos

$$\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = 0. \tag{3}$$

Ahora,

$$\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{41.6}$$

$$\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon E\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right);$$

entonces, escribiendo

$$w = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \tfrac{1}{2}\mu H^2, \tag{4}$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = J^2/\sigma \qquad (76.1), \tag{5}$$

(3) se convierte en

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{J^2}{\sigma} = 0. \tag{6}$$

Si integramos esta expresión sobre el volumen incluido dentro de una superficie cerrada S, obtenemos, usando el teorema de divergencia,

$$(7) \qquad \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}\, dS + \frac{\partial}{\partial t} \int w\, dV + \int \frac{J^2}{\sigma}\, dV = 0.$$

Cada término de esta ecuación tiene las dimensiones ML^2T^{-3}, una razón de realización de trabajo (joules por segundo). Procedemos entonces a interpretar (7) como una *ecuación de energía.*

Si tomamos a w como la energía del campo por unidad de volumen,

$$\int w\, dV = \text{energía electromagnética dentro de } S,$$

y esta energía aumenta a razón de

$$(7)' \qquad \frac{\partial}{\partial t} \int w\, dV = -\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}\, dS - \int \frac{J^2}{\sigma}\, dV.$$

Puesto que $-\mathbf{n}$ es la normal unitaria *interna* a la superficie S, tomamos a la integral de superficie $-\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}\, dS$ como la energía en joules por segundo que fluye en la región que tiene por límite a S. Entonces el vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ representa la intensidad del flujo de energía en watts por metro cuadrado. Puesto que esta interpretación fue dada por Poynting en 1884, el vector

$$(8) \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

se conoce como *vector de Poynting.*

Por otra parte, la integral $\oint J^2/\sigma\, dV$ representa la razón a la que la energía del campo eléctrico $\mathbf{E}$ se transforma en calor. La energía del campo magnético no tiene una "relajación" correspondiente.

Interpretamos entonces a (7)′ como sigue:

La razón de crecimiento de la energía electromagnética dentro de una superficie cerrada es igual a la razón a la que la energía fluye a través del límite menos la razón a la que la energía del campo eléctrico se disipa en calor.

En un campo estacionario $\partial w/\partial t = 0$, y (6) se reduce a

$$(9) \qquad \operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{J^2}{\sigma} = 0.$$

81. Potenciales. Puesto que $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, el vector solenoidal $\mathbf{B}$ admite un potencial vectorial $\mathbf{A}$:

(1) $$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

donde $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, una función de la posición y del tiempo, es arbitraria para un gradiente aditivo $\nabla\psi$ de una función escalar (§54). La primera ecuación de Maxwell da ahora

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0};$$

por lo tanto, el vector irrotacional $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$ admite un potencial escalar φ:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi,$$

donde $\varphi(\mathbf{r}, t)$ es arbitraria para una función aditiva del tiempo; y

(2) $$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi.$$

Si $\mathbf{A}_0$, φ_0 son valores particulares de los potenciales, y $\psi(\mathbf{r}, t)$ es una función arbitraria, los potenciales

(3) $$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\psi, \qquad \varphi = \varphi_0 - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

darán el mismo campo ($\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$).

Para un medio homogéneo isotrópico, ε y μ son constantes, y

(4)(5) $$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \qquad \mathbf{D} = -\varepsilon \left(\nabla\varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Si substituimos estos valores en

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \qquad (74.2),$$

encontramos que

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \varepsilon\mu \left(\nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = \mu\mathbf{J};$$

o, reemplazando rot rot $\mathbf{A}$ por $\nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$ (40.12),

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\mathbf{J}.$$

Más aún, puesto que div $\mathbf{D} = \rho$, tenemos, de (5)

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

El grado de arbitrariedad de A y φ nos permite imponer la condición

(6) $$\operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

a los potenciales, puesto que, de (3), necesitamos solamente escoger a ψ que satisfaga la ecuación

(7) $$\operatorname{div}\mathbf{A}_0 + \nabla^2\psi + \varepsilon\mu\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Cuando se ha hecho esto, tanto A como φ satisfacen ecuaciones diferenciales de la misma forma:

(8) $$\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

(9) $$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Para *campos estacionarios*, las derivadas con respecto al tiempo son nulas. Entonces A y φ son funciones solamente de la posición y los vectores del campo están dados por

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

La condición (6) se convierte en div $A = 0$. Los potenciales satisfacen ahora las *ecuaciones de Poisson:*

(8)′ $$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J},$$

(9)′ $$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon.$$

Puesto que div J $= 0$ para corrientes estacionarias (74.5), la condición div $A = 0$ es concordante con (8)′.

82. Electrostática. En un campo estacionario los vectores E y D satisfacen las ecuaciones de Maxwell

(1) $$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad (74.1),$$

(2) $$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \qquad (74.7),$$

La ecuación (1) muestra que **E** tiene un potencial escalar:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{3}$$

En un medio homogéneo isotrópico, ε es constante,

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \varepsilon \operatorname{div}\mathbf{E} = -\varepsilon\,\nabla^2\varphi,$$

y (2) muestra que φ satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon. \tag{4}$$

Si hacemos $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon$ en las identidades de Green (55.3-4), tenemos, para cualquier superficie cerrada S que contenga un volumen V,

$$4\pi\,\varphi(P) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r}\,dV + \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, \quad P \text{ dentro de } S, \tag{5}$$

$$0 = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r}\,dV + \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, \; P \text{ fuera de } S. \tag{6}$$

En estas fórmulas r es la distancia desde P, el punto de observación, a un punto Q en el elemento de volumen o de superficie; entonces las integrales de volumen y de superficie en (5) no son las mismas que en (6).

Si φ es regular en el infinito (55.5), (5) y (6) pueden aplicarse a la región V_∞ al exterior de S; la normal a S exterior a V_∞ es ahora $-\mathbf{n}$, y tenemos

$$4\pi\,\varphi(P) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_\infty} \frac{\rho}{r}\,dV - \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, \quad P \text{ fuera de } S, \tag{7}$$

$$0 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_\infty} \frac{\rho}{r}\,dV - \oint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, \; P \text{ dentro de } S, \tag{8}$$

puesto que, cuando P está fuera de S está dentro de V_∞ Si ahora sumamos (5) y (8), o (6) y (7), las integrales de superficie se cancelan, y tenemos para todas las posiciones de P

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\infty \frac{\rho}{r}\,dV \tag{9}$$

al integrar para todo el espacio.

En cualquier caso, las cargas ocupan solamente una región finita V_1 más allá de la cual $\rho = 0$, digamos una región V_1 cuyo límite es la superficie S_1; entonces

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1} \frac{\rho}{r}\,dV. \tag{10}$$

Podemos ahora calcular $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ en P tomando el gradiente de (10) bajo el signo de integral; y, puesto que $\nabla_P r^{-1} = -r^{-2}\mathbf{R}$, donde $\mathbf{R}$ es un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{QP}$,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1}\frac{\rho}{r^2}\mathbf{R}\,dV. \tag{11}$$

Al derivar funciones de $r = PQ$ podemos hacer variar ya sea P o Q, manteniendo fijo el otro punto. Así,

$$\nabla_P r = \mathbf{R}, \qquad \nabla_Q r = -\mathbf{R}, \tag{12}$$

donde se hacen variar P y Q, respectivamente; y, en general

$$\nabla_P f(r) = f'(r)\,\nabla_P r = -f'(r)\,\nabla_Q r = -\nabla_Q f(r). \tag{13}$$

Si O es un origen fijo dentro de V_1, y Q un punto variable de V_1, la razón $QP/OP \to 1$ a medida que $P \to \infty$; entonces, a distancias de V_1 que sean muy grandes comparadas con las dimensiones de V_1, el potencial

$$\varphi(P) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q}{|OP|}, \tag{14}$$

donde $q = \int \rho\,dV$ es la carga total. Análogamente, la intensidad eléctrica

$$\mathbf{E}(P) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q}{|OP|^2}\mathbf{R}, \tag{15}$$

donde $\mathbf{R}$ es un vector unitario en la dirección OP. Si la carga se concentra en un volumen pequeño, estas expresiones tienen un amplio grado de validez, y para una "carga puntual" en O, pueden tomarse como exactas. Así, obtenemos de nuevo (79.3) y llegamos a la *ley de Coulomb*. Notamos también que (14) y (15) muestran que $|OP||\varphi|$ y $|OP|^2|\mathbf{E}|$ están uniformemente limitadas. Así, el potencial debido a una distribución finita de carga es *regular en el infinito* (55.5).

Cuando existen cargas en el interior y en el exterior de S, el potencial en los puntos dentro de S está dado por (5). Si escribimos

$$\varphi_1(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r}\,dV, \tag{16}$$

$$\varphi_2(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \oint_S \left[\frac{1}{r}\varepsilon\frac{d\varphi}{dn} - \varepsilon\varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS, \tag{17}$$

tenemos $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, donde φ_1 es una solución particular de $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon$ válida dentro de S, y φ_2 es una solución de $\nabla^2\varphi = 0$ correspondiente a los valores de límite de φ y $d\varphi/dn$ (teorema 56.3). Así, φ_1 y φ_2 son los potenciales respectivos debidos a las cargas en el interior y en el exterior de S. Si ponemos

$$\omega = \varepsilon\frac{d\varphi}{dn}, \qquad \tau = -\varepsilon\varphi,$$

en (17), tenemos

$$\varphi_2(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \oint_S \frac{\omega}{r} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \tau\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{18}$$

Entonces, en vista de (79.10-11), podemos establecer el

TEOREMA 1. *Las cargas exteriores a una superficie cerrada S producen el mismo potencial en un punto interior que una simple capa de densidad $\varepsilon d\varphi/dn$ y una doble capa de densidad de momento $-\varepsilon\varphi$ en S.*

De una manera similar podemos deducir de (7) el

TEOREMA 2. *Las cargas dentro de una superficie cerrada S producen el mismo potencial en un punto exterior que una simple capa de densidad $-\varepsilon\, d\varphi/dn$ y que una capa doble de densidad de momento $\varepsilon\varphi$ en S.*

La superficie S divide al espacio en dos regiones V y V_∞ (Fig. 82*a*). El teorema 2 se deduce del teorema 1 y si V se toma como fuera de V_∞; entonces ω y τ cambian de signo porque ahora $-\mathbf{n}$ es la normal externa. En caso de que S sea una superficie equipotencial, τ es constante y la integral para la doble capa se anula por (56.3); puesto que $1/r = 1/PQ$ es armónica dentro de S cuando P está fuera de S.

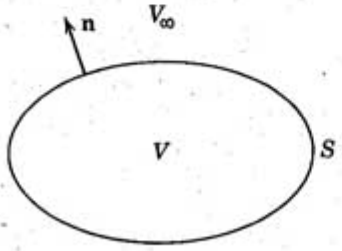


Fig. 82a. Dos regiones formadas por una superficie cerrada.

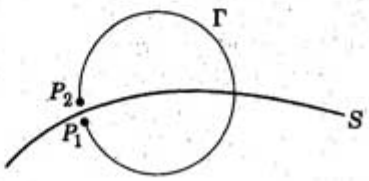


Fig. 82*b*. Ilustración de la continuidad de ρ.

En la superficie S de separación de dos medios, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, y $\mathbf{E}$ satisface las condiciones de límite:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \omega \qquad (74.11),$$

(19)

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}.$$

(20)

El argumento para (19) se dió en §74; y consideraciones similares nos llevan a (20). Puesto que rot $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ implica que $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$ sobre cualquier curva reducible, siempre que tomemos a $\mathbf{E}$ y a sus derivadas con respecto al espacio cambiando rápidamente pero de una manera continua en una capa de transición cerca de S. Es más conveniente, sin embargo, tomar a $\mathbf{E}$ como discontinua en S, pero de tal manera que $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las curvas cerradas, aún aquellas que cortan a S. Encontramos entonces igual que en §46 que la componente tangencial de $\mathbf{E}$ es continua en S, como se establece en (20). Así, si escribimos $\mathbf{E} = E_t\mathbf{T} + E_n\mathbf{n}$ en S,

$$E_{2t} - E_{1t} = 0, \qquad \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \omega. \tag{21}$$

Sin embargo, *el potencial es continuo*. Puesto que, si P_1, P_2 son puntos cercanos a S pero en lados opuestos, la integral de línea sobre una curva Γ (Fig. 82 *b*) es

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2).$$

A medida que P_1 y P_2 se aproximan a un punto en S,

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \to \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad \text{y} \qquad \varphi(P_1) - \varphi(P_2) \to 0.$$

Ejemplo. Calculemos el campo $\mathbf{E}$ debido a una esfera de radio a con una densidad de carga uniforme $\rho = q/4/3\pi a^3$. Puesto que el campo tiene simetría radial, $E = E(r)\mathrm{R}$ es una función vectorial de r dirigida hacia afuera desde el centro. En vez de calcular las integrales (10) y (11), es más sencillo usar el teorema de Gauss (79.1) para encontrar $\mathbf{E}$.

El flujo normal sobre una esfera de radio r es

$$4\pi r^2 E = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon} & \text{cuando } r > a, \\ \dfrac{q}{\varepsilon}\dfrac{r^3}{a^3} & \text{cuando } r < a. \end{cases}$$

donde q es la carga total en la esfera; entonces

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r^2}, & r>a,\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{r}{a^3}, & r<a.\end{cases}$$

Para encontrar el potencial φ, integramos

$$\frac{d\varphi}{dr}=\mathbf{R}\cdot\nabla\varphi=-\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}=-E,$$

y determinamos las constantes de tal manera que $\varphi(\infty)=0$, y $\varphi(r)$ sea continua cuando $r=a$. Obtenemos así

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}, \qquad r>a,$$

$$\varphi=-\frac{q}{8\pi\varepsilon}\frac{r^2}{a^3}+C, \quad r<a.$$

Igualando estos valores cuando $r=a$, encontramos $C=3q/8\pi\varepsilon a$; entonces

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r}, & r>a,\\[2ex] \dfrac{q}{8\pi\varepsilon}\dfrac{3a^2-r^2}{a^3}, & r<a.\end{cases}$$

83. Conductores. En un *conductor*, las cargas interiores se mueven rápidamente a la superficie del mismo (§76). Consecuentemente, un conductor que esté en equilibrio electrostático tiene solamente cargas de superficie. Así, si una carga q se coloca dentro de un conductor aislado K, la carga se distribuirá sobre la superficie con una densidad ω tal que $\int_K \omega\, dS = q$.

En el interior de un conductor, $\mathbf{J}=\mathbf{0}$, y

(1) $$\mathbf{E}=\mathbf{J}/\sigma=\mathbf{0} \qquad (76.1),$$

y, puesto que $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$,

(2) $$\nabla\varphi=\mathbf{0}, \qquad \varphi=\text{ constante.}$$

Más aún, φ tiene el mismo valor constante en la superficie del conductor por razón de su continuidad (§82); entonces

La superficie de un conductor es una superficie equipotencial.

Si un conductor K_1 está rodeado por un medio dieléctrico 2 de permitividad ε, las condiciones de límite (82.19-20) toman la forma

$$(3) \qquad \mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1 = 0, \qquad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \omega,$$

donde $\mathbf{n}$ es una normal unitaria externa a K. En términos del potencial, éstas se convierten en

$$(4) \qquad \varphi = \text{constante}, \quad \frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\omega}{\varepsilon} \qquad \text{en } K;$$

entonces, en la superficie de un conductor el potencial satisfase las condiciones de límite

$$(5)\,(6) \qquad \varphi = \text{constante}, \quad \oint_K \frac{d\varphi}{dn}\, dS = -\frac{q}{\varepsilon}.$$

Un problema fundamental en electrostática puede formularse así: un número de conductores finitos limitados por las superficies K_i se colocan en un dieléctrico de permitividad constante ε que está libre de cargas. Si cada K_i recibe una carga q_i, entre todas producen un campo electrostático cuyo potencial φ satisface la ecuación de Laplace

$$(7) \qquad \nabla^2 \varphi = 0 \qquad (82.4)$$

en el dieléctrico sin carga ($\rho = 0$). En la superficie de cada conductor, φ satisface las condiciones de límite

$$(8)\,(9) \qquad \varphi = \varphi_i \text{ (constante)}, \quad \int_{K_i} \frac{d\varphi}{dn}\, dS = -\frac{q_i}{\varepsilon},$$

donde las constantes φ_i son, en general, desconocidas. Buscamos entonces una solución de la ecuación de Laplace que satisfaga las condiciones de límite y que sea regular en el infinito. *Si este problema tiene solución, ésta es única.*

Demostración. Si φ_1 y φ_2 son soluciones, $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ satisface $\nabla^2 \varphi = 0$ con las condiciones de límite en cada K_i:

$$\psi = \psi_i \text{ (const)}, \qquad \oint_{K_i} \frac{d\psi}{dn}\, dS = 0.$$

Para cualquier función ψ regular en el infinito, podemos aplicar el teorema de divergencia a $\psi \nabla \psi$ en la región infinita V_∞ fuera de los conductores; puesto que

$$\operatorname{div}(\psi \nabla \psi) = |\nabla \psi|^2,$$

obtenemos entonces

$$\int_{V_\infty} |\nabla\psi|^2 \, dV = -\sum_{i=1}^{n} \psi_i \int_{K_i} \frac{d\psi}{dn} \, dS = 0$$

de las condiciones de límite (8-9); en cuanto al signo menos, nótese que las normales externas a V_∞ son internas a los conductores. Puesto que $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ es continua dondequiera en el dieléctrico, $|\nabla\varphi|$ es continua y la integral de volumen no puede anularse a menos que $\nabla\varphi = 0$. Entonces $\psi =$ constante, y la constante es cero debido a la regularidad de ψ en el infinito; entonces $\varphi_1 = \varphi_2$.

Cuando a los conductores se les dan cargas q_i', sea φ' el potencial correspondiente. Es obvio entonces que las cargas $q_i + q_i'$ dan lugar al potencial $\varphi + \varphi'$, y al campo correspondiente $-\nabla(\varphi + \varphi') = \mathbf{E} + \mathbf{E}'$. Esta es la *ley de la superposición de los efectos eléctricos.*

Si aplicamos (56.2) a las funciones armónicas φ y φ' en la región infinita fuera de los conductores, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{K_i} \left(\varphi \frac{d\varphi'}{dn} - \varphi' \frac{d\varphi}{dn} \right) dS = 0,$$

o, en vista de las condiciones (8) y (9),

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i q_i' = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i' q_i. \tag{10}$$

Este resultado se conoce como *teorema recíproco de Green.*

Ejemplo 1. Si se coloca una carga q dentro de una esfera metálica aislada de radio a, la carga se extenderá por su superficie con la densidad

$$\omega = \frac{q}{4\pi a^2}.$$

Si la esfera está rodeada por un medio ilimitado de permitividad ε, y aplicamos el teorema de Gauss a una esfera de radio $r > a$, tenemos entonces

$$\varepsilon 4\pi r^2 E = q = 4\pi a^2 \omega;$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\varepsilon} \dfrac{a^2}{r^2}, & r > a, \\ 0, & r < a. \end{cases}$$

Entonces E pasa desde 0 hasta ω/ε en la superficie de la esfera. Puesto que

$$\frac{d\varphi}{dr} = -E, \qquad \varphi(\infty) = 0,$$

encontramos que

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\varepsilon}\dfrac{a^2}{r}, & r > a, \\ \dfrac{\omega}{\varepsilon}a, & r \leqq a, \end{cases}$$

puesto que φ es continua en la superficie.

Ejemplo 2. Disco. Un disco delgado de radio a (Fig. 83a) recibe una carga uniforme de densidad de superficie $\frac{1}{2}\omega$ en cada lado; la

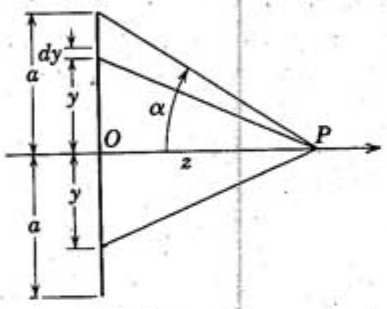


Fig. 83a. Disco cargado.

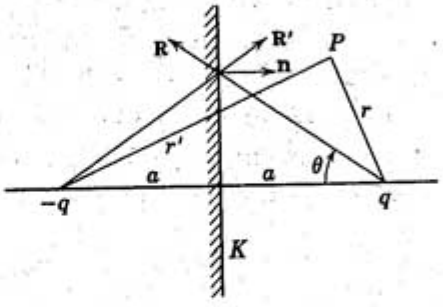


Fig. 83b. Plano conductor.

carga total es, entonces, $\pi a^2\omega$. Si DV es el volumen de un anillo de área $dA = 2\pi y\, dy$, $\rho dV = \omega dA$, y, en un punto P en el eje del disco,

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\omega}{r}\,dA = \frac{\omega}{4\pi\varepsilon}\int_0^a \frac{2\pi y\,dy}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$= \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right)$$

En el eje, $\mathbf{E} = \pm E\mathbf{k}$, de acuerdo con que P esté a la derecha o a la izquierda del disco; y

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = \frac{\omega}{2\varepsilon}(1 - \cos\alpha).$$

Cerca del disco, $\alpha \cong \frac{1}{2}\pi$ y $E \cong \omega/2\varepsilon$; y, a medida que recorremos el disco de izquierda a derecha, φ es continua, pero $\mathbf{E}$ varía desde

$$-\frac{\omega}{2\varepsilon}\mathbf{k} \quad \text{a} \quad \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \frac{\omega}{2\varepsilon}\mathbf{k}$$

de acuerdo con (82.21).

A medida que $a \to \infty$, el disco se convierte en un plano infinito y entonces $E = \omega/2\varepsilon$ en *todos* los puntos.

Ejemplo 3. Carga inducida en un plano conductor. Consideremos dos cargas puntiformes q y $-q$ en un dieléctrico de permitividad ε

Fig. (83*b*). Si r y r' denotan la distancia desde un punto P a dichas cargas, el potencial del campo que producen en P es

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

El plano mediano $K(r = r')$ es la superficie equipotencial $\varphi = 0$. Puesto que φ es regular en el infinito, podemos aplicar el teorema de Green a la superficie "cerrada" K. Entonces, por el teorema 82.2, la carga $-q$ a la izquierda de K produce el mismo potencial a la derecha de K que la densidad de superficie

$$\omega = -\varepsilon\frac{d\varphi}{dn} = \varepsilon\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$$

distribuida sobre K. Ahora

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\mathbf{R}}{r^2} - \frac{\mathbf{R}'}{r'^2}\right),$$

y, a medida que aproximamos el plano $r = r'$,

$$E \to \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = -\frac{q\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^2}\mathbf{n} = -\frac{q\cos^3\theta}{2\pi\varepsilon a^2}\mathbf{n}.$$

Entonces, la "capa equivalente de Green" es

$$\omega = -\frac{q\cos^3\theta}{2\pi a^2}.$$

Supongamos ahora que la carga q se coloca a la derecha de un plano conductor K. Puesto que K se extiende hasta el infinito, su potencial será nulo. El campo de q debe ser, por lo tanto, modificado de tal manera que $\varphi = 0$ en K. Las corrientes fluirán dentro de K y producirán una densidad de carga ω para lograr este resultado. Esta carga de superficie inducida por q se determina más simplemente reemplazándola por la carga puntiforme equivalente $-q$, la imagen de q en K. Atravesando K de derecha a izquierda, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}$ saltará desde 0 hasta ω, por (3), siempre que ω tenga el valor dado arriba.

Para encontrar la carga total $\int \omega\, dA$ en K usamos elementos anulares de carga

$$dA = 2\pi y\, dy = 2\pi a \tan\theta\,(a\sec^2\theta\, d\theta);$$

entonces

$$\int_K \omega\, dA = -q\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -q$$

Puesto que $\omega = \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}$, esto es una consecuencia del teorema de Gauss (79.1):

$$\int_K \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\, dA = -q.$$

84. Capacidad. *Caso* 1. Consideremos un conductor aislado K con una carga q en un dieléctrico de permitividad ε. El potencial φ debido a esta carga satisface $\nabla^2\varphi = 0$ fuera de K, las condiciones de límite

$$\varphi = \text{constante}, \oint_K \frac{d\varphi}{dn}\, dS = -\frac{q}{\varepsilon} \text{ en } K \qquad (83.5\text{-}6),$$

y es regular en el inifinito. Si la carga fuese q', el potencial φ' satisfaría $\nabla^2\varphi' = 0$ fuera de K y las condiciones de borde

$$\varphi' = \text{constante}, \oint_K \frac{d\varphi'}{dn}\, dS = -\frac{q'}{\varepsilon} \text{ en } K.$$

Si la φ es una solución del primer problema,

$$\varphi' = \frac{q'}{q}\,\varphi \tag{1}$$

es una solución del segundo; y, como la solución es única, es entonces ésta la única. En consecuencia, la razón de la carga en K a su potencial es una constante

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q'}{\varphi'}. \tag{2}$$

La constante C se llama la capacidad de K, o, más precisamente, del condensador (K, K_∞) donde K_∞ es un conductor de potencial nulo (la tierra).

Caso 2. Consideremos ahora dos conductores aislados K_1 y K_2. Si K_1 recibe una carga q, aparecerán cargas inducidas en K_2 de suma total nula, y el potencial debido a este sistema de cargas satisface $\nabla^2\varphi = 0$ y las condiciones de límite

$$\varphi = \varphi_1 \text{ (constante)}, \quad \oint_{K_1} \frac{d\varphi}{dn}\, dS = -\frac{q}{\varepsilon} \qquad \text{en } K_1,$$

$$\varphi = \varphi_2 \text{ (constante)}, \quad \oint_{K_2} \frac{d\varphi}{dn}\, dS = 0 \qquad \text{en } K_2.$$

Si K_1 recibe la carga q', el potencial φ' está dado de nuevo por (1); y, puesto que q', φ_1' φ_2', son el producto de q'/q por q_1, φ_1, φ_2, la razón

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q'}{\varphi'_1 - \varphi'_2} \tag{3}$$

es la misma en ambos casos. La constante C se llama ahora la capacidad de K_1 y K_2, o, más precisamente, del condensador (K_1, K_2, K_∞).

Caso 3. Con los mismos conductores K_1, K_2, sea K_2 mantenido con un potencial constante mientras que a K_1 se le da la carga q. Así, K_2 podrá estar puesto *a* tierra (conectado a K_∞) por lo que su potencial será siempre nulo. Entonces, la carga q en K_1 inducirá una carga negativa q_2 en K_2. Entonces, el potencial φ debido a estas cargas satisface $\nabla^2\varphi = 0$ y las condiciones de límite

$$\varphi = \varphi_1 \text{ (const)}, \qquad \oint_{K_1} \frac{d\varphi}{dn}\, dS = -\frac{q}{\varepsilon} \quad \text{en } K_1,$$

con $\varphi = 0$ en K_2. Cuando se conoce φ, la carga inducida en K_2 está dada por

$$q_2 = -\varepsilon \oint_{K_2} \frac{d\varphi}{dn}\, dS. \tag{4}$$

Evidentemente, si se reemplaza q por q', el potencial φ' está de nuevo dado por (1); y la razón

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\varphi_1} \tag{5}$$

es la misma en ambos casos. Ahora C se llama la capacidad del condensador $(K_1, K_2 + K_\infty)$.

Si φ es el potencial del caso 2, $\psi = \varphi - \varphi_2$ es evidentemente el potencial del caso 3. La capacidad en ambos casos es exactamente la misma, puesto que $\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$.

Ejemplo 1. Esferas concéntricas. Una esfera de metal K_1 de radio a tiene una carga q y está rodeada por una esfera hueca concéntrica delgada K_2 de radios b, c (Fig. 84*a*). El campo tiene simetría radial, y $\varphi(r)$ es una función solamente de r. La función más general de r que satisface $\nabla^2\varphi = 0$ es

$$\varphi = \frac{A}{r} + B \qquad (42.22).$$

La constante A se encuentra de la condición de límite

$$\int_{K_1} \frac{d\varphi}{dr}\, dS = -\frac{A}{a^2}\, 4\pi a^2 = -\frac{q}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto $A = q/4\pi\varepsilon$ y

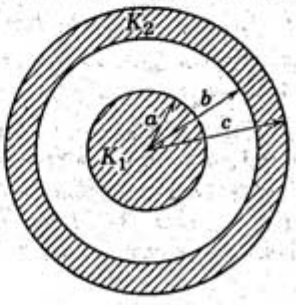


Fig. 84*a*. Esfera delgada rodeando a otra esfera.

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right);$$

la capacidad de (K_1, K_2, K_∞) es, entonces

$$C = \frac{q}{\varphi(a) - \varphi(b)} = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}. \tag{6}$$

Cuando $r \geq c$, $\varphi(r) = A'/r$ puesto que $\varphi(\infty) = 0$; y la condición de que la carga en K_2 sea nula, es decir

$$\int_{K_2}\frac{d\varphi}{dn}\,dS = -\int_{r=b}\frac{d\varphi}{dr}\,dr + \int_{r=c}\frac{d\varphi}{dr}\,dr = \frac{A}{b^2}4\pi b^2 - \frac{A'}{c^2}4\pi c^2 = 4\pi(A - A') = 0,$$

nos da $A' = A = q/4\pi\varepsilon$. Finalmente, $\varphi(b) = \varphi(c)$ da

$$\frac{A}{b} + B = \frac{A'}{c}, \qquad B = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

La función potencial es, por lo tanto,

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right), & a \leqq r \leqq b, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{c}, & b \leqq r \leqq c, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{1}{r}, & r \geqq c. \end{cases} \tag{7}$$

Estos resultados se calculan más fácilmente haciendo uso del teorema de Gauss,[229] pero el procedimiento general queda ilustrado con el ejemplo anterior.

Cuando K_2 está a tierra y K_1 tiene la carga q, aplicamos el teorema de Gauss a una esfera de radio r entre K_1 y K_2; entonces

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon}, \qquad \frac{d\varphi}{dr} = -E = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2},$$

y, puesto que $\varphi(b) = 0$,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right), \qquad a \leqq r \leqq b.$$

La capacidad de $(K_1, K_2 + K_\infty)$ está dada también por (6); y, si hacemos que $b \to \infty$, obtenemos la capacidad $4\pi\varepsilon a$ de la esfera aislada o sea el condensador (K_1, K_∞).

Cuando K_1 está a tierra y K_2 tiene la carga q, hacemos $q = q_b + q_c$, donde q_b está en la cara interior $r = b$; q_c en la cara exterior $r = c$. Si aplicamos el teorema de Gauss a una esfera dentro de K_2, encontramos que K_1 tiene la carga inducida $-q_b$. Ahora, del teorema de Gauss aplicado a una esfera de radio $r > c$, encontramos que

$$4\pi r^2 E = -\frac{q_c}{\varepsilon}, \qquad \frac{d\varphi}{dr} = -E = -\frac{q_c}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2},$$

y, puesto que $\varphi(\infty) = 0$,

$$\varphi(r) = \frac{q_c}{4\pi\varepsilon r}, \qquad r \geqq c.$$

Del teorema de Gauss aplicado a una esfera de radio $r(a < r < b)$, tenemos

$$4\pi r^2 E = \frac{-q_b}{\varepsilon}, \qquad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}, \qquad \varphi(r) = \frac{-q_b}{4\pi\varepsilon r} + \text{const};$$

y, puesto que $\varphi(a) = 0$,

$$\varphi(r) = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right), \qquad a \leqq r \leqq b.$$

Pero, puesto que $\varphi(b) = \varphi(c)$,

$$q_b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = q_c\frac{1}{c} \qquad \text{y} \qquad q_b : q_c : q = \frac{1}{c} : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

La capacidad de $(K_1 + K_\infty, K_2)$, es, por lo tanto,

$$C = \frac{q}{\varphi(c)} = 4\pi\varepsilon c\,\frac{q}{q_c} = 4\pi\varepsilon\left(\frac{ab}{b-a} + c\right).$$

Ejemplo 2. Placas paralelas. Dos placas paralelas K_1, K_2 con áreas iguales A, están separadas por una distancia h, pequeña con respecto a sus dimensiones. Despreciando los efectos de zonas de poca intensidad en los bordes, tomamos a K_1 como teniendo una carga de superficie uniforme ω. Excepto cerca de los bordes, el campo entre K_1 y K_2 es casi perpendicular a las placas. Si K_1 es el plano $z = 0$ y el eje z se traza hacia K_2, tenemos, de (83.4)

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\omega}{\varepsilon}, \qquad \varphi(z) = -\frac{\omega}{\varepsilon}z + \text{ constante.}$$

Si K_2 está a tierra, $\varphi(h) = 0$, y la constante está determinada; así

$$\varphi(z) = \frac{\omega}{\varepsilon}(h - z), \qquad \varphi(0) = \frac{\omega h}{\varepsilon},$$

y la capacidad de las placas es muy aproximadamente

$$C = \frac{q}{\varphi(0)} = \frac{A\omega}{\omega h/\varepsilon} = \frac{\varepsilon A}{h}. \tag{8}$$

PROBLEMAS

1. Un conductor sin carga K_2 se eleva hasta el potencial φ dando a K_1 una carga q. Si K_1 está descargado, encontrar su potencial cuando K_2 recibe una carga q. [Usar (83.10).]

2. Una carga puntiforme q en P induce una carga q_1 sobre el conductor a tierra $K_1(\varphi_1 = 0)$. Cuando K_1 está aislado y se le ha puesto con un potencial φ_1, el potencial de su campo en P es $\varphi' P$. Demostrar que

3. En el Prob. 2, K_1 es una esfera de radio a puesta a tierra y P está a la distancia r de su centro. Demostrar que una carga q en P inducirá una carga $q_1 = -aq/r$ en K_1. [Ej. 83.1]

4. Si $b = a + h$ en (6), donde a es grande y h relativamente pequeño, demostrar que $C \cong \varepsilon A/h$, la capacitancia de un condensador de placas paralelas.

5. Tres esferas huecas delgadas concéntricas A, B, C, de radios $a < b < c$ están separadas por un dieléctrico de permitividad ε. Si A y C están conectadas a tierra y a B se le da una carga q, demostrar que las caras interior y exterior de B tendrán las cargas:

$$q_1 = \frac{a(c-b)}{b(c-a)}q, \qquad q_2 = \frac{c(b-a)}{b(c-a)}q;$$

y que el potencial de B será:

$$\varphi(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}.$$

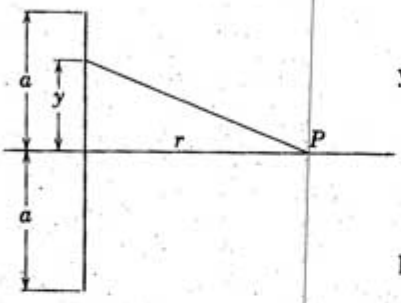


Fig. 84b. Conductor uniforme.

Además que, $q/\varphi(b)$ es la suma de las capacidades de AB y BC.

6. Un alambre delgado recto de longitud $2a$ está uniformemente cargado con $2a\lambda$ coulombs. (Fig. 84*b*). En un plano que bisecta al alambre, demostrar que el potencial y el campo en un punto P a una distancia r del alambre están dados por

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}, \qquad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\,\frac{a}{r\sqrt{a^2+r^2}}\,\mathbf{R}.$$

7. Si el alambre del Prob. 6 es infinito y está cargado con una densidad lineal λ, demostrar que el potencial y el campo en todos sus puntos es

$$\varphi = C - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log r, \qquad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\,\frac{\mathbf{R}}{r}.$$

Encontrar la constante C si $\varphi = \varphi_0$ cuando $r = r_0$.

8. Sean dos alambres paralelos delgados, representados por O_1 y O_2 (rectas perpendiculares al papel), de longitud infinita y a una distancia $2b$ (Fig. 84*c*). Si sus densidades de carga son λ y $-\lambda$ por unidad de longitud, demostrar que el potencial en cualquier plano normal a los alambres es

$$\varphi = C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log\frac{r_2}{r_1}.$$

Demostrar que las líneas equipotenciales son una familia de círcu-

los que tienen a O_1 y O_2 como puntos inversos, y que las líneas del campo son la familia de círculos que pasan por O_1 y O_2.

[Si O_1, O_2 son los orígenes de las coordenadas bipolares r_1, θ_1, y r_2, θ_2, las líneas equipotenciales son los círculos $r_1/r_2 =$ constante; éstos se cortan en ángulos rectos por los círculos $\varphi_2 - \varphi_1 =$ constante, las líneas del campo. Cf. Prob. 37.9.]

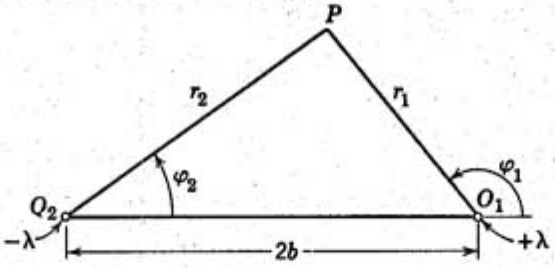


Fig. 84c. Dos conductores paralelos infinitos.

9. Dos conductores cilíndricos paralelos A, B, de longitud infinita y radio R, tienen sus centros a una distancia $2h$ el uno del otro (Fig. 84d). Si sus densidades de carga son λ y $-\lambda$ por unidad de longitud,

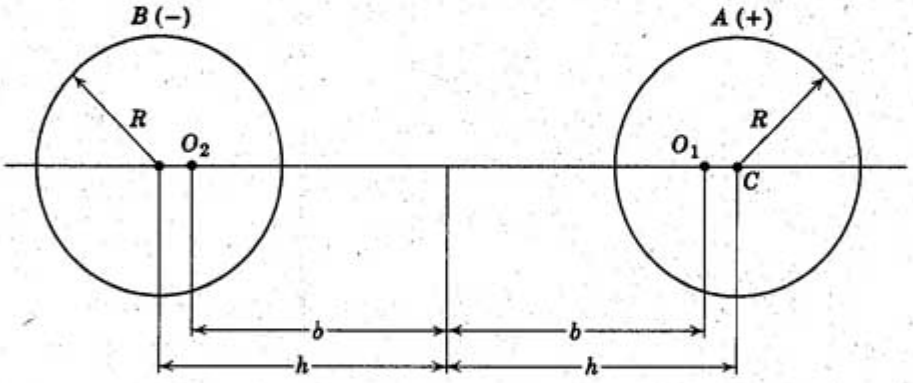


Fig. 84d. Dos conductores cilíndricos paralelos.

demostrar que su campo puede calcularse reemplazándolos por líneas análogamente cargadas a una distancia $2b$ entre ellas (Prob. 8), donde $b = \sqrt{h^2 - R^2}$. Deducir, en consecuencia, del Prob. 3, que

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \log \frac{b + (h - R)}{b - (h - R)} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \log \frac{h + b}{R}.$$

[O_1 y O_2 son puntos inversos a un círculo de centro C y radio R, dado que $CO_1 \cdot CO_2 = (h - b)(h + b) = R^2$.]

10. En la Fig. 84e, O representa un alambre infinito cargado, paralelo al plano conductor infinito p. Si O tiene la densidad de carga lineal λ, demostrar que el potencial en un plano normal a O (el papel) y a la derecha de p es

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \log \frac{r'}{r},$$

donde r, r' son distancias radiales desde O y su imagen O', y que

$$\omega = -\frac{\lambda \cos\theta}{\pi r}$$

es la densidad de carga inducida en p por el alambre O.

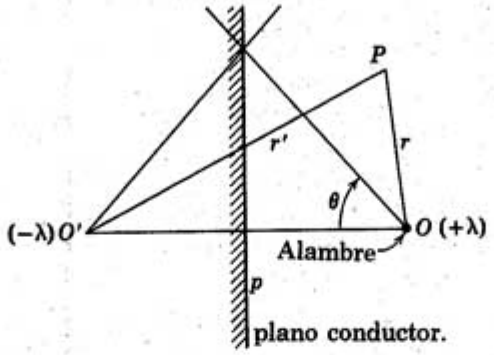


Fig. 84*e*. Alambre infinito paralelo a un plano conductor.

85. Magnetostática. En un campo estacionario los vectores magnéticos **H** y **B** satisfacen las ecuaciones

$$\text{(1)} \qquad \text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (74.2),$$

$$\text{(2)} \qquad \text{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad (74.6).$$

Además, la ecuación de continuidad se convierte ahora en

$$\text{(3)} \qquad \text{div}\,\mathbf{J} = 0 \qquad (74.5).$$

B puede ser derivado ahora de un potencial vectorial

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}$$

tal que

$$\text{(5)} \qquad \text{div}\,\mathbf{A} = 0 \qquad (81.6).$$

Si el medio es homogéneo, isotrópico y no ferromagnético (§74), tenemos $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. La ecuación (1) da ahora

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \text{rot rot}\,\mathbf{A} = \mu\mathbf{J},$$

o, puesto que rot rot $\mathbf{A} = -\nabla^2\mathbf{A}$ en vista de (5),

$$\text{(6)} \qquad \nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}.$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares de Poisson,

$$\text{(6)}' \qquad \nabla^2 A_i = -\mu J_i, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

donde A_i, J_i denotan las componentes rectangulares de **A** y **J**.

Si las corrientes constantes ocupan un volumen finito V_1

dentro de una superficie cerrada S_1, podemos deducir, de la misma manera que en §82, que

$$4\pi A_i(P) = \mu \int_{V_1} \frac{J_i}{r}\, dV, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

y que, consecuentemente,

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}}{r}\, dV. \tag{7}$$

Este vector satisface div $\mathbf{A} = 0$. Haciendo variar a P encontramos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_P \mathbf{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1} \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{J}}{r}\, dV \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1} \nabla_P \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{J}\, dV \qquad (41.4) \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1} \nabla_Q \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{J}\, dV \qquad (82.13). \end{aligned}$$

Puesto que $\operatorname{div}_Q \mathbf{J} = 0$, la integral es igual a

$$\int_{V_1} \operatorname{div}_Q \frac{\mathbf{J}}{r}\, dV = \oint_{S_1} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}}{r}\, dS$$

aplicando el teorema de divergencia. Pero si el flujo de electricidad está confinado dentro de la superficie S_1, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ en S_1 y, entonces,

$$\operatorname{div}_P \mathbf{A} = 0. \tag{8}$$

Así, el potencial vectorial dado por (7) es un vector solenoidal que satisface (6). Ahora, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, y

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \operatorname{rot}_P \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}}{r}\, dV = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1} \nabla_P \left(\frac{1}{r}\right) \times \mathbf{J}\, dV,$$

puesto que $\mathbf{J}$ en la integral no depende de P. Haciendo $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ y

$$\nabla_P \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \nabla_P r = -\frac{\mathbf{R}}{r^2}$$

donde $\mathbf{R}$ es un vector unitario dirigido desde los elementos de corriente hacia P, tenemos

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_1} \frac{\mathbf{J}\times\mathbf{R}}{r^2}\,dV. \tag{9}$$

Esta fórmula es la análoga de (82.11).

Si aplicamos ahora (7) y (9) a un tubo delgado de corriente cerrada que lleve una corriente constante I. Haciendo

$$\mathbf{J}\,dV = \mathbf{J}\,dA\,ds = I\mathbf{T}\,ds,$$

donde $\mathbf{T}$ es una tangente unitaria en la dirección de la corriente,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint \frac{\mathbf{T}}{r}\,ds, \tag{10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{\mathbf{T}\times\mathbf{R}}{r^2}\,ds. \tag{11}$$

Así, cada elemento de corriente $I\,ds$ contribuye con

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{T}\times\mathbf{R}}{r^2}\,I\,ds \tag{12}$$

al campo magnético total. † En 1820, Biot y Savart dedujeron hechos esenciales de esta fórmula de sus experimentos; es conocida, por lo tanto, como *ley de Biot-Savart.* ‡

La corriente que fluye a través de una superficie S contenida dentro de una curva cerrada C es, por (1),

$$I = \int \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int \mathbf{n}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{H}\,dS;$$

entonces, por el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot\mathbf{T}\,ds = I. \tag{13}$$

Este importante resultado, ya demostrado en §75, es la

LEY DE AMPERE. *La circulación de la intensidad magnética en cualquier curva cerrada simple es igual a la corriente total abrazada por el circuito.*

---

† Si $\mathbf{f}$ es una función vectorial arbitraria, podemos sumar $\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{f}\,ds$ a esta expresión para $d\mathbf{H}$ sin que se altere el valor de la integral de circuito. Aunque $d\mathbf{H}$ dado en (12) no es de ningún modo única, tiene al menos su forma más simple.

‡ También llamada ley de Ampère por algunos autores.

Ejemplo 1. Corriente recta infinita. Podríamos calcular **H** en el punto P producido por una corriente recta infinita I en la dirección del vector unitario **e** (Fig. 85*a*). Si escribimos $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{N}$, donde **N** es una normal unitaria al alambre, tenemos en Q

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}\cos\theta - \mathbf{e}\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \mathbf{T}\times\mathbf{R} = \mathbf{e}\times\mathbf{N}\cos\theta,$$
$$r = a\sec\theta, \qquad s = a\tan\theta;$$

y, de (12),

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathbf{e}\times\mathbf{N}\cos\theta}{a^2\sec^2\theta}\,a\sec^2\theta\,d\theta,$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi a}\mathbf{e}\times\mathbf{N}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{I}{2\pi a}\mathbf{e}\times\mathbf{N}. \tag{14}$$

En la figura, $\mathbf{e}\times\mathbf{N}$ apunta hacia arriba desde la hoja.

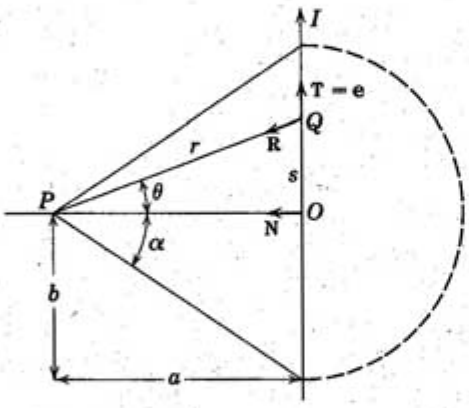


Fig. 85*a*. Corriente recta infinita.

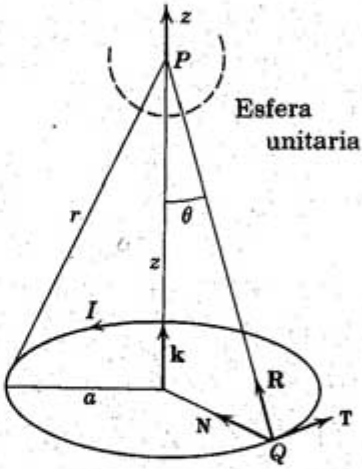


Fig. 85*b*. Corriente circular.

Puesto que $d\mathbf{H}$ en (12) se toma como un elemento debido a una corriente cerrada, podría uno dudar de la validez de (14). Pero, si la corriente fuese cerrada por el semicírculo punteado de radio $\sqrt{a^2+b^2}$ en la figura, podemos fácilmente encontrar que el campo en P es

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{a} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathbf{e}\times\mathbf{N}. \tag{15}$$

A medida que $b\to\infty$, $\alpha\to\pi/2$, y obtenemos de nuevo (14).

H tiene el mismo valor numérico en todos los puntos de un cilindro coaxial con la corriente. Podemos entonces calcular **H** a partir de la ley de Ampère, puesto que, a medida que P describe un círculo de radio a alrededor de la corriente,

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi a H = I.$$

Ejemplo 2. Campo axial de una corriente circular. Encontraremos **H** en un punto P del eje de una corriente circular I (Fig. 85*b*). Si **T**, **N** son tangentes unitarias y normal principal,

$$\mathbf{R} = \mathbf{k}\cos\theta + \mathbf{N}\,\text{sen}\,\theta, \qquad \mathbf{T}\times\mathbf{R} = -\mathbf{N}\cos\theta + \mathbf{k}\,\text{sen}\,\theta,$$

y $r = a/\text{sen}\,\theta$ es constante; entonces

$$\mathbf{H}(P) = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{\mathbf{T}\times\mathbf{R}}{r^2}\,ds$$

$$= \frac{I}{4\pi r^2}\left(-\cos\theta \oint \mathbf{N}\,ds + \mathbf{k}\,\text{sen}\,\theta \oint ds\right).$$

Puesto que $\oint \mathbf{N}\,ds = \mathbf{0}, \qquad \oint ds = 2\pi a,$

(16) $$\mathbf{H}(P) = \frac{I\,\text{sen}^3\,\theta}{2a}\,\mathbf{k}.$$

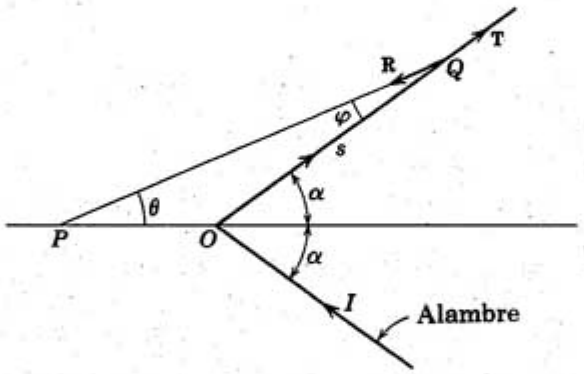


Fig. 85c. Alambre infinito formando un ángulo 2α.

Ejemplo 3. Alambre infinito formando un ángulo 2α. En la Fig. 85*c* cada lado del ángulo contribuye con $\frac{1}{2}$**H** en P. Si **k** es un vector unitario que apunta hacia arriba desde el papel,

$$\mathbf{T}\times\mathbf{R} = \mathbf{k}\,\text{sen}\,\varphi, \qquad r = a\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\varphi}, \qquad s = a\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\varphi},$$

y, puesto que $\theta + \varphi = \alpha$, $d\theta = -d\varphi$, tenemos

$$ds = a\frac{-\text{sen}\,\varphi\cos\theta - \text{sen}\,\theta\cos\varphi}{\text{sen}^2\,\varphi}\,d\varphi = -a\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}^2\,\varphi}\,d\varphi.$$

En consecuencia

$$\frac{\mathbf{T}\times\mathbf{R}}{r^2}\,ds = -\frac{\mathbf{k}}{a\,\text{sen}\,\alpha}\,\text{sen}\,\varphi\,d\varphi,$$

$$\int \frac{\mathbf{T}\times\mathbf{R}}{r^2}\,ds = -\frac{2\mathbf{k}}{a\,\operatorname{sen}\alpha}\int_0^{\alpha}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = \frac{2k}{a}\,\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{2\mathbf{k}}{a}\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{I\tan\frac{1}{2}\alpha}{2\pi a}\,\mathbf{k}.$$

Cuando $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\mathbf{H} = \mathbf{k}I/2\pi a$, de acuerdo con (14).

86. Potencial magnetostático. Una corriente constante cerrada I genera un campo magnético $\mathbf{H}$, y en cualquier región libre de corrientes

$$(1)\,(2) \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

sobre cualquier curva reducible; esto es, una curva que no abrace a la corriente. La región entera fuera de las corrientes será múltiplemente conexa debido a su presencia, pero cualquier porción simplemente conexa admitirá un potencial escalar uniforme ψ para $\mathbf{H}$ tal que

$$(3) \qquad \mathbf{H} = -\nabla\psi.$$

Para encontrar el *potencial magnetostático* en P, reescribimos la ley de Biot-Savart en la forma †

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{4\pi}\oint \frac{\mathbf{T}\times\nabla_Q r}{r^2}\,ds = \frac{I}{4\pi}\oint \mathbf{T}\times\nabla_Q\left(\frac{1}{r}\right)ds,$$

y transformamos entonces la integral mediante (51.3) en una integral sobre una superficie S que contenga al circuito de corriente. Puesto que $\operatorname{div}_Q\nabla_Q(1/r) = 0$, obtenemos entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{I}{4\pi}\int\left(\nabla_Q\nabla_Q\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS\\ &= \frac{I}{4\pi}\int\left(\nabla_P\nabla_P\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad (82.13)\\ &= \frac{I}{4\pi}\nabla_P\int\left(\nabla_P\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS\\ &= -\frac{I}{4\pi}\nabla_P\int\left(\nabla_Q\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS.\end{aligned}$$

Ahora, de (52.8)

$$\int\left(\nabla_Q\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS = \Omega,$$

† En (85.11), $\mathbf{R}$ tiene la dirección $\overrightarrow{PQ}$, puesto que Q está en el elemento de corriente $\nabla_Q r = -\mathbf{R}$.

el ángulo sólido subtendido por el lazo de corriente en P, puesto que de la Fig. 86*a* vemos que, **n**, la normal a S, está dirigida hacia el observador P, mientras que en (52.8), **n** está dirigida en el sentido opuesto. Entonces

$$\mathbf{H} = -\nabla_P \left(\frac{I\Omega}{4\pi}\right), \tag{4}$$

y

$$\psi = \frac{I\Omega}{4\pi} \tag{5}$$

es el potencial escalar deseado.

Nótese que, en la Fig. 86*a*, P está en el lado positivo de S ya que se determina por el sentido del circuito; en este caso Ω se toma positivo. Si P está en el lado negativo de S, Ω debe tomarse negativo.

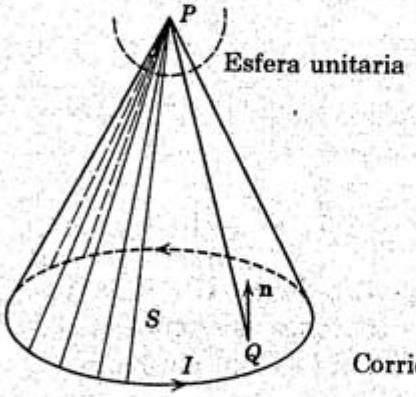


Fig. 86*a*. Lazo de corriente.

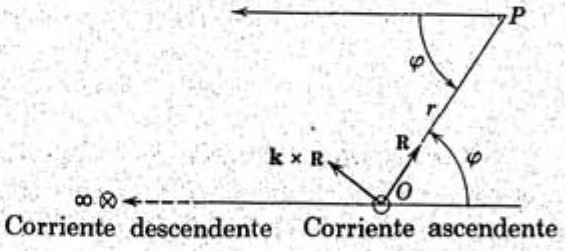


Fig. 86*b*. Corriente recta infinita.

Ejemplo 1. Corriente recta infinita. En la Fig. 86*b* la corriente recta infinita en O está fluyendo hacia arriba desde el papel a lo largo del eje z. Si **k** es un vector unitario a lo largo de este eje y **R** un vector radial unidad hacia el punto P en el plano xy, el campo en P, dado por (85.14), es

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi}\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{R}}{r} = \frac{I}{2\pi}\nabla\varphi \tag{6}$$

(37.16).

Así, **H** se deriva del potencial escalar

$$\psi = -\frac{I\varphi}{2\pi}.$$

Este resultado está de acuerdo con (5). Puesto que, si tomamos la corriente de regreso situada a la *izquierda* de O a una distancia infini-

ta, P está en el lado negativo del circuito; entonces el ángulo sólido Ω subtendido por el circuito en P es el área negativa de un sector de ángulo φ; así

$$\Omega = -\frac{\varphi}{2\pi} 4\pi = -2\varphi,$$

donde 4π es el área de la esfera unitaria.

Si la corriente de regreso fuese tomada a la *derecha* de O, P hubiese estado en el lado positivo del circuito. Ahora el ángulo sólido es

$$\Omega = 2(\pi - \varphi), \qquad \psi = \frac{I(\pi - \varphi)}{2\pi},$$

pero $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ está dado aún por (6).

Ejemplo 2. Dos corrientes paralelas infinitas. En la Fig. 86c, el papel representa el plano xy y las corrientes son paralelas al eje z (hacia

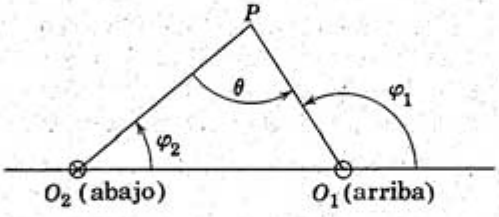


Fig. 86c. Dos corrientes paralelas infinitas.

arriba en O_1, hacia abajo en O_2). El punto P está en el lado negativo del circuito y el ángulo sólido subtendido por las corrientes en P es el área negativa de un sector de ángulo θ; entonces

$$\Omega = -\frac{\theta}{2\pi} 4\pi = -2\theta = -2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ahora, de (5)

$$\psi = \frac{I\Omega}{4\pi} = \frac{I}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1);$$

y $\mathbf{H}$ está dado por $-\nabla\psi$, o

$$\mathbf{H} = -\frac{I}{2\pi}\left(\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{R}_2}{r_2} - \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{R}_1}{r_1}\right) = \frac{I}{2\pi}\left(\nabla \log\frac{r_2}{r_1}\right)\times\mathbf{k}. \tag{7}$$

Puesto que podemos escribir

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi}\,\mathrm{rot}\left(\mathbf{k}\log\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{40.10},$$

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ se deriva del potencial vectorial

$$\mathbf{A} = \mathrm{k}\frac{\mu I}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}; \tag{8}$$

así, $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, y $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

En el plano xy las líneas equipotenciales $\psi =$ constante son la familia de círculos $\varphi_1 - \varphi_2 =$ constante que pasan por O_1 y O_2. Las líneas del campo de $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ cortan a estos círculos en ángulos rectos, y, de (7), son la familia de círculos coaxiales $r_2/r_1 =$ constante que tienen a O_1 y a O_2 como puntos inversos (cf. Prob. 37.9).

Ejemplo 3. El problema del Ej. 85.2 puede también ser resuelto por medio de (4). Refiriéndose a la Fig. 85*b*, el ángulo sólido Ω subtendido en P por la corriente es igual al área interceptada en una esfera de radio unidad con centro en P por un cono con ángulo 2θ; entonces

$$\Omega = 2\pi\int_0^\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2\pi(1 - \cos\theta), \qquad \psi = \frac{I}{2}(1 - \cos\theta).$$

La simetría muestra que, en puntos que estén en el eje z, $\mathbf{H}$ tiene solamente una componente $-z$. Ésta está dada por

$$H = -\mathrm{k}\cdot\nabla\psi = -\frac{d\psi}{dz} = -\frac{d\psi}{d\theta}\Big/\frac{dz}{d\theta};$$

y, puesto que $z = a\cot\theta$,

$$H = \frac{-\frac{1}{2}I\operatorname{sen}\theta}{-a/\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{I}{2a}\operatorname{sen}^3\theta.$$

PROBLEMAS

1. Demostrar la ecuación (85.15).

2. En el Ej. 1, demostrar que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ está derivado del potencial vectorial

$$\mathbf{A} = -\mathrm{k}\frac{\mu I}{2\pi}\log r.$$

Deducir, en consecuencia, el potencial vectorial (8) para dos corrientes paralelas infinitas.

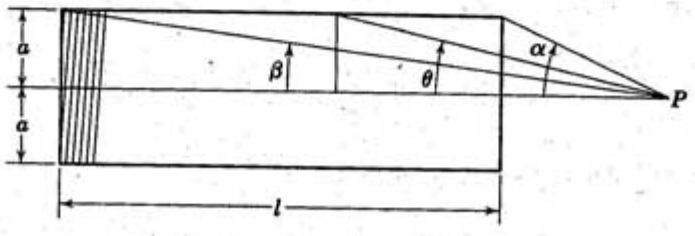


Fig. 86*d*. Solenoide.

3. Un *solenoide* es un alambre enrollado formando una hélice circular. Si el solenoide tiene n vueltas contiguas en una bobina de longitud l y radio a, demostrar que la intensidad magnética en un punto P (Fig. 86*d*) debida a la corriente I es de magnitud

$$H = \frac{nI}{2l}(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Demostrar que, en el centro de un solenoide muy largo ($l \gg a$), $H \simeq nI/l$; y, que, en sus extremos, $H \simeq nI/2l$.

[Tómese la corriente como una lámina de densidad lineal $\lambda = nI/l$ amperes por metro y úsese (85.16):

$$H(P) = \frac{\lambda}{2a}\int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{sen}^3\theta\, d(a\cot\theta)\,]$$

87. Fuerzas sobre las cargas y las corrientes. En §77 definimos la fuerza del campo eléctrico **E** de tal manera que una carga puntual q estaría sometida a la fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. En términos de cargas distribuidas con la desidad de volumen ρ, definimos ahora **E** de tal manera que la fuerza ejercida sobre las cargas por unidad de volumen sea $\rho\mathbf{E}$. Entonces la fuerza total ejercida sobre las cargas dentro de un volumen V es

$$\mathbf{F}_e = \int_V \rho\mathbf{E}\, dV. \tag{1}$$

Si V es tan pequeño que **E** pueda tomarse como constante dentro de V,

$$\mathbf{F}_e \simeq \mathbf{E}\int \rho\, dV = q\mathbf{E} \tag{2}$$

de acuerdo con (77.1).

Para relacionar la fuerza ejercida sobre una corriente con el campo magnético observamos de §77 que $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ (al igual que $\rho\mathbf{E}$) tiene las dimensiones de fuerza por unidad de volumen:

$$[J][B] = L^{-2}T^{-1}Q\cdot MT^{-1}Q^{-1} = ML^{-2}T^{-2} = [F]L^{-3}.$$

Así, definimos el vector **B** de tal manera que la fuerza ejercida sobre las corrientes por unidad de volumen sea $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$. Entonces, la fuerza total sobre las corrientes dentro de un volumen V es

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{J}\times\mathbf{B}\, dV. \tag{3}$$

Si la corriente circula en un conductor lineal delgado, de

tal manera que **B** pueda ser tomado como constante en cualquier sección, tenemos

$$\mathbf{F}_m = \int \mathbf{J}\, dA \times \oint \mathbf{B}\, ds = \oint I\mathbf{T}\, ds \times \mathbf{B};$$

en consecuencia, la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente lineal $I\, d\mathbf{r} = I\mathbf{T}\, ds$ es

$$d\mathbf{F}_m = I\, d\mathbf{r} \times \mathbf{B}. \tag{4}$$

En contraste con $\mathbf{F}_e$, que se ejerce paralelamente a **E**, la fuerza $d\mathbf{F}_m$ es perpendicular al plano de $d\mathbf{r}$ y **B**.

Estando definidos **E** y **B**, los vectores **D** y **H** están dados por $\varepsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}/\mu$, respectivamente. Las propiedades del campo electromagnético definidas de esta manera son compatibles con las ecuaciones de Maxwell y en completo acuerdo con la experimentación.

Finalmente, si un elemento de carga q se mueve con la velocidad **v** en un campo electromagnético, entonces constituye un elemento de corriente $q\mathbf{v}$; y el campo ejerce las fuerzas

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

sobre él. La fuerza total sobre la carga en movimiento es, entonces,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{5}$$

Ejemplo 1. Partícula cargada en un campo eléctrico estacionario. Una partícula de masa m y con carga q tiene, por (5), la ecuación del movimiento

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} = -q\,\nabla\varphi.$$

Multiplicando escalarmente por $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, nos da

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -q\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\varphi$$

o

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2) = -q\, d\varphi.$$

Entonces, integrando sobre cualquier trayectoria de $\mathbf{r}_0$ a **r**, tenemos

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = q(\varphi_0 - \varphi) \tag{6}$$

para la energía adquirida (joules) por una partícula de m kilogramos y cargada con q coulombs al "caer" a través de una diferencia de potencial de $V = \varphi_0 - \varphi$ volts. Si la velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, la velocidad adquirida es

$$v = \sqrt{2qV/m} \quad \text{metros por segundo} \tag{7}$$

Para un electrón

$$m = 9.107 \times 10^{-31} \text{ kg}, \qquad q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ coulomb},$$

y (7) da

$$v = 5.93 \times 10^5 \sqrt{V} \text{ metros por segundo.}$$

La energía adquirida por un electrón al caer a través de un volt se llama *electrón-volt;* de (6)

$$1 \text{ electron voltio} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ joule.}$$

La órbita (como para cualquier partícula en un campo de fuerza constante), es una parábola si $\mathbf{v}_0$ no es paralela a $\mathbf{E}$. *

En la discusión anterior, la masa m se toma como constante, en vez de tener el valor relativista $m_0(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$, donde m_0 es la masa en el reposo y c la velocidad de la luz. Entonces, a medida que $v \to c$, $m \to \infty$. Pero, si $v \ll c$, $m \simeq m_0$; así, si $v = c/10$, $m = m_0/\sqrt{0.99} = 1.005\ m_0$.

Ejemplo 2. Partícula cargada en un campo magnético constante. Escríbase el vector de campo constante $\mathbf{H} = H\mathbf{e}$, donde $|\mathbf{e}| = 1$. Entonces, de (5), la partícula cargada tiene la ecuación del movimiento

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mu\mathbf{H} = \mu qH\, \mathbf{v} \times \mathbf{e}$$

Multiplicando escalarmente por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{e}$, nos da ahora

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = 0, \qquad \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) = 0;$$

entonces, v y $\mathbf{e}$ $\mathbf{v}$ son constantes. Puesto que $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ (32.3), tenemos

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{T} = \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo constante entre $\mathbf{e}$ y $\mathbf{v}$. Puesto que la velocidad v es constante, la aceleración es puramente normal e igual a $\kappa v^2\mathbf{N}$ (32.5); entonces, la ecuación del movimiento es

$$m\kappa v^2\mathbf{N} = \mu qHv\, \mathbf{T} \times \mathbf{e}.$$

Igualando magnitudes y vectores unitarios, esto nos da dos ecuaciones:

(8) (9)
$$m\kappa v^2 = \mu qHv \operatorname{sen} \alpha, \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{e}}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

* Cuando $\mathbf{E}$ es constante, la ecuación del movimiento se integra fácilmente, resultando

$$\mathbf{v} = \frac{q}{m}\mathbf{E}t + \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r} = \frac{q}{2m}\mathbf{E}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

De (8) vemos que κ es constante y que la curvatura de la trayectoria es

$$\kappa = \frac{\mu q H \operatorname{sen} \alpha}{mv}. \tag{10}$$

Derivando a (9) con respecto al arco s y usando las fórmulas de Frenet (29.4), tenemos

$$-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} = \frac{\kappa \mathbf{N} \times \mathbf{e}}{\operatorname{sen} \alpha};$$

y, multiplicando escalarmente por $\mathbf{B}$,

$$\tau = \frac{\kappa}{\operatorname{sen} \alpha} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{e} = \frac{-\kappa}{\operatorname{sen} \alpha} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e} = -\kappa \cot \alpha.$$

Puesto que tanto κ como τ son constantes, la trayectoria es una hélice circular (Ej. 30.2). En particular, si $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{H}$, $\alpha = \pi/2$, y, de (10), la trayectoria es un círculo de radio $\rho = mv/\mu q H$. Como comprobación, notamos que ρ tiene las dimensiones de la longitud (§77).

Capítulo 9

Espacios Vectoriales

88. Postulados. En la geometría y en la física matemática es conveniente tener un concepto más general de los vectores, que sea aplicable a espacios de más de tres dimensiones. En consecuencia, formulamos una definición abstracta de un vector libre de conceptos geométricos y que es aplicable en una gran diversidad de casos.

Un espacio vectorial $V(\mathfrak{F})$ en un campo escalar † $\mathfrak{F}$ está formado por un conjunto de elementos llamados *vectores* que tienen las siguientes propiedades.

A_1. Dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ determinan una suma única $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

A_2. La adición de vectores es asociativa:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

A_3. La adición de vectores es conmutativa:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

A_4. Existe un vector nulo $\mathbf{0}$ tal que

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

A_5. Todo vector $\mathbf{u}$ admite un negativo (aditivo inverso) $-\mathbf{u}$ tal que

$$-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

M_1. Un vector $\mathbf{u}$ en V y un escalar a en $\mathfrak{F}$ determinan un producto escalar único $a\mathbf{u}$ en V. ‡

M_2. La multiplicación escalar es asociativa:

$$(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u}).$$

† Ver *Advanced Calculus*, §2, para la definición de un campo y la deducción de las leyes de cancelación. Los números racionales, reales y complejos constituyen tres campos importantes. En este capítulo, *escalar* significa un número de $\mathfrak{F}$.

‡ En lo sucesivo, a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ lo llamaremos *producto interior*.

M_3. La multiplicación escalar es distributiva de las dos maneras:

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}, \qquad (a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}.$$

M_4. El elemento unitario e del campo (que denotaremos en lo sucesivo con 1) tiene la propiedad

$$e\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

De estos postulados podemos deducir las leyes de cancelación

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ implica $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,

(2) $a\mathbf{u} = a\mathbf{v}$ implica $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ if $a \neq 0$.

El vector nulo $\mathbf{0}$ y el escalar nulo 0 están conectados mediante la importante identidad

(3) $0\mathbf{u} = 0$ para todo $\mathbf{u}$.

Esto se deduce de que

$$a\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (a + 0)\mathbf{u} = a\mathbf{u} = a\mathbf{u} + \mathbf{0}$$

al cancelar $a\mathbf{u}$. Más aún, de

$$a\mathbf{u} + a\mathbf{0} = a(\mathbf{u} + 0) = a\mathbf{u} = a\mathbf{u} + \mathbf{0},$$

tenemos también

(4) $$a\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Nótese finalmente que el negativo de $\mathbf{u}$ (postulado en A_5) está dado por

(5) $$-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u};$$

puesto que

$$(-1)\mathbf{u} + (1\mathbf{u}) = (-1 + 1)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Debe observarse que la adición de vectores y su multiplicación por escalares produce vectores y que V es *cerrado* con respecto a ambas operaciones.

Ejemplo 1. Los segmentos de recta dirigidos del Cap. 1 son vectores, puesto que satisfacen todos los postulados. Si estos vectores $\mathbf{u}$ se representan por medio de sus componentes $[u_1, u_2, u_3]$ escritas en orden, tales ternas ordenadas obedecen las leyes

$$[u_1, u_2, u_3] + [v_1, v_2, v_3] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3],$$

$$\lambda[u_1, u_2, u_3] = [\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3],$$

y $[0, 0, 0] = \mathbf{0}$ es el vector nulo. Las leyes conmutativa, asociativa y distributiva A_2, A_3, M_2, M_3 son consecuencias de las leyes correspondientes en el campo $\mathscr{R}$ de los números reales.

Ejemplo 2. En la estática coplanar (§22), las fuerzas y los pares pueden ser representados plenamente por el símbolo $(\mathbf{f}, \mathbf{f}_O)$. Si $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ es una fuerza, $\mathbf{f}_O$ es el momento de $\mathbf{f}$ con respecto a O; si $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{f}_O \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_O$ es el momento de un par. Las leyes de la estática están comprendidas en las reglas operativas

$$\lambda(\mathbf{f}, \mathbf{f}_O) = (\lambda\mathbf{f}, \lambda\mathbf{f}_O), \qquad (\mathbf{f}^1, \mathbf{f}_O^1) + (\mathbf{f}^2, \mathbf{f}_O^2) = (\mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2, \mathbf{f}_O^1 + \mathbf{f}_O^2),$$

y en el hecho de que el equilibrio estático corresponde a

$$\Sigma\,(\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_O^i) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

Los elementos $(\mathbf{f}, \mathbf{f}_O)$ constituyen, entonces, un espacio vectorial con $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ como vector nulo. Este espacio vectorial es isomorfo con el espacio vectorial de vectores fijos en el espacio que parten desde el origen (§22).

Ejemplo 3. Todas las funciones de x con valores reales en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ constituyen un espacio vectorial. Porque dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ pueden ser sumadas para obtener una tercera función $f(x) + g(x)$ del conjunto; y, si λ es un número del campo real, $\lambda f(x)$ es también una función. Aunque estas funciones no pueden ser representadas gráficamente con flechas, constituyen, sin embargo, un espacio vectorial; el valor de $f(x)$ en cada punto del intervalo puede tomarse como la "componente" en ese punto.

89. Dependencia lineal. Los n vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ de un espacio vectorial $V(\mathfrak{I})$ *se dicen linealmente dependientes* si existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ en $\mathfrak{I}$, no todos ellos nulos, tales que

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son *linealmente independientes*. Consecuentemente, si la relación (1) existe entre n vectores linealmente independientes, entonces todas las λ_i son nulas.

Si m vectores son linealmente dependientes, cualquier número mayor n de vectores que incluyen a aquéllos, son también linealmente dependientes. Porque si

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0},$$

podemos dar a $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ estos valores (al menos uno de los cuales es diferente de cero) y tomar $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

Entonces se satisface (1) y los n vectores $\mathbf{u}_i$ son linealmente independientes.

Si $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (cancelando λ en $\lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{0}$); entonces *un vector es linealmente dependiente solamente cuando es el vector nulo.* Así, los vectores de cualquier conjunto que incluya al vector nulo son linealmente dependientes.

TEOREMA. *Los vectores* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n$ *diferentes de cero son linealmente dependientes cuando y sólo cuando uno de ellos es una combinación lineal de sus predecesores en esta sucesión.*

Demostración. Si $\mathbf{u}_{k+1} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k$, los vectores $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{k+1}$ son linealmente dependientes, y lo mismo es cierto para cualquier conjunto mayor que los contenga.

Inversamente, si $\mathbf{u}_1, \cdots \mathbf{u}_n$ son linealmente dependientes, sea $k+1$ el mayor índice en (1) para el cual $\lambda_{k+1} \neq 0$; podemos entonces resolver (1) para $\mathbf{u}_{k+1}$ en términos de $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$. Nótese que $k+1 > 1$; puesto que, si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, tendríamos $\lambda_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, contrario a la hipótesis.

Ejemplo. Para los vectores libres del Cap. 1, podemos fácilmente demostrar que:

1. *Dos vectores propios son linealmente dependientes cuando son paralelos.*
2. *Tres vectores propios son linealmente dependientes cuando son paralelos a un plano.*

Demostración de 2. Si $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = 0$ y $\lambda_3 \neq 0$, la división por λ_3 nos da $\mathbf{u}_3 = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2$, y la construcción del paralelogramo nos muestra que $\mathbf{u}_3$ está en el plano de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Inversamente, si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ son paralelos a un plano, son linealmente dependientes. Puesto que, si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son paralelos, entonces $\mathbf{u}_2 = \alpha\mathbf{u}_1$ ($\alpha \neq 0$); y, si no existen dos de ellos paralelos, entonces tenemos $\mathbf{u}_3 = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2$ ($\alpha, \beta \neq 0$). por la construcción del paralelogramo.

90. Subespacios. Un subconjunto de vectores en $V(\mathfrak{F})$ que forme un espacio vectorial se llama un subespacio vectorial de $V(\mathfrak{F})$.

Si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$ son vectores dados de $V(\mathfrak{F})$, el conjunto de todas las combinaciones lineales

$$(1) \qquad \mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k \qquad (\lambda_i \text{ en } \mathfrak{F}),$$

se llama un *sistema lineal* L_k.

El sistema lineal L_k es un subespacio vectorial de $V(\mathfrak{F})$, que posiblemente sea $V(\mathfrak{F})$ mismo. Puesto que, si

$$\mathbf{u}' = \lambda_1'\mathbf{a}_1 + \lambda_2'\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k'\mathbf{a}_k \qquad (\lambda_i \text{ en } \mathfrak{F}),$$

los vectores

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \lambda_i')\mathbf{a}_i, \qquad \lambda\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda\lambda_i\mathbf{a}_i \ (\lambda \text{ en } \mathfrak{F}),$$

son elementos de L_k. El subespacio L_k se dice *engendrado* por los vectores $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$.

Así, para los vectores flecha del Cap. 1, el subespacio L_1 engendrado por el vector $\alpha_1 \neq 0$ consiste de todos los vectores $\lambda\alpha_1$ colineales con α_1. El subespacio L_2 engendrado por dos vectores α_1 y α_2 no colineales consta de todos los vectores $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ coplanares con α_1 y α_2. Finalmente, si α_1, α_2, α_3 no son coplanares, el subespacio L_3 que engendran consta de todos los vectores $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$; y, puesto que todo vector flecha puede ser escrito en esta forma, α_1, α_2, α_3 engendran todo el espacio vectorial de tres dimensiones.

DEFINICIÓN. *Un conjunto de vectores linealmente independientes que engendren un espacio vectorial se llama* base *para ese espacio.*

Así, tres vectores no coplanares α_1, α_2, α_3 forman una *base* para el espacio vectorial ordinario de tres dimensiones.

Tenemos ahora el fundamental

TEOREMA. *Si n vectores engendran un espacio vectorial que contiene k vectores linealmente independientes, entonces* $n \geq k$.

Demostración. † Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ los vectores que engendran el espacio vectorial V que contiene k vectores linealmente independientes $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_k$. Entonces $\mathbf{b}_1 \neq 0$ y está dado por una combinación lineal de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$; entonces, los vectores de la sucesión $\{\mathbf{b}_1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ son linealmente dependientes. Por el teorema 89, algún α_i es una combinación lineal de sus predecesores en esta sucesión; y, si lo descartamos, entonces $\mathbf{b}_1$ y los restantes $n - 1$ α engendran aún a V.

† Seguimos el argumento de Birkhoff y MacLane en *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, 1953. Puesto que no se utiliza la ley conmutativa $ab = ba$, el teorema es válido cuando los escalares forman un *anillo divisorio.*

Si llamamos α_1 al vector descartado, los n vectores $\mathbf{b}_1$, $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ engendran el espacio vectorial V que contiene $k-1$ vectores linealmente independientes $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_k$. Repetimos ahora el argumento anterior. Sea ahora $\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$ y está dado por una combinación lineal de $\mathbf{b}_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$; entonces, los vectores de la sucesión $\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ son linealmente dependientes. Puesto que $\mathbf{b}_1 \neq \lambda \mathbf{b}_2$ por hipótesis, el teorema 1 demuestra que algún α_i de esta sucesión es una combinación lineal de sus predecesores; y, si lo descartamos, entonces $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_1$ y los restantes $n-2$ α engendran aún a V.

Si llamamos al vector descartado α_2, los n vectores $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\alpha_3, \alpha_4, \cdots, \alpha_n$ engendran el espacio vectorial V que contiene a $k-2$ vectores linealmente independientes $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \cdots, \mathbf{b}_k$. Repetimos el argumento anterior y encontramos que podemos descartar a otro α_i de la sucesión $\{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$; puesto que las $\mathbf{b}$ no pueden descartarse por ser linealmente independientes.

Este proceso se repite hasta que

(a) todos los α sean descartados, o

(b) todos los $\mathbf{b}$ se agoten, pero resten algunos α.

En el caso (a), los $\mathbf{b}$ se agotarán cuando todos los α se descarten; de otra manera cualquier $\mathbf{b}$ restante podría ser una combinación lineal de los $\mathbf{b}$ ya usados, contradiciendo a la hipótesis. Entonces, en el caso (a), $n = k$. En el (b), $n > k$. Así, $n \geqq k$, y el teorema está demostrado.

91. Bases y dimensión. El siguiente teorema nos permite definir la dimensión de un espacio vectorial cuya base está formada por un número finito de vectores.

TEOREMA 1. *Todas las bases de un espacio vectorial contienen el mismo número de vectores, siempre que sea un número finito.*

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ y $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_k$ dos bases de un espacio vectorial V. Puesto que los α engendran a V y los $\mathbf{b}$ son linealmente independientes, $n \geqq k$, por el teorema 90. Pero, puesto que los $\mathbf{b}$ engendran a V y los α son linealmente independientes, $k \geqq n$. Por lo tanto $n = k$, como se enuncia en el teorema.

La *dimensión* de un espacio vectorial se define ahora como el número de vectores (finito) en cualquiera de sus bases.

Cualquier espacio vectorial de n dimensiones es un sistema lineal L_n.

TEOREMA 2. *En un espacio vectorial de n dimensiones, $n+1$ vectores cualesquiera son linealmente dependientes.*

Demostración. Por el teorema 1, cualquier base del espacio vectorial consta exactamente de n vectores. Si existiesen $n+1$ vectores linealmente independientes en L_n, el teorema 90 requeriría una imposibilidad, es decir $n \geqq n+1$. En consecuencia, $n+1$ vectores cualesquiera del espacio deben ser linealmente dependientes.

TEOREMA 3. *Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ *de un espacio vectorial en un campo* $\mathfrak{F}$ *forma una base; y cualquier vector* $\mathbf{u}$ *del espacio tiene una representación única*

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n, \tag{1}$$

donde los escalares u^i están en el campo $\mathfrak{F}$. †

Demostración. Los $n+1$ vectores $\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ son linealmente dependientes, por el teorema 2; en consecuencia

$$\lambda\mathbf{u} + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n = 0, \tag{2}$$

donde las lambdas están en $\mathfrak{F}$ y al menos uno de ellas no es nula. Si $\lambda = 0$, entonces la dependencia lineal de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ requeriría que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, y todas las lambdas en (9) se anularían. Entonces, $\lambda \neq 0$; y, resolviendo (2) para $\mathbf{u}$ y escribiendo $\mathbf{u}^i = -\lambda_i/\lambda$, obtenemos (1). Puesto que todo vector del espacio puede ser representado de esta manera, los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ forman una base.

Si existiese una segunda expresión para $\mathbf{u}$ de la forma (1) con coeficientes u_i, tendríamos, haciendo la resta,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (u^i - u_i)\mathbf{e}_i \quad \text{en todas} \quad u^i - u_i = 0,$$

puesto que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ son linealmente independientes, La expresión (1) para $\mathbf{u}$ en términos de la base es, por lo tanto, única.

Los escalares $u^1, u^2, \cdots, u^n$ en (1) se llaman las *componentes* del vector $\mathbf{u}$ relativas a la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$. El vector

† De la misma manera que en 15, los índices superiores *no son exponentes*, sino meras identificaciones.

nulo $\mathbf{0}$ tiene todas sus componentes iguales a 0. La totalidad de los vectores $\mathbf{u}$ forma un sistema lineal (§90); denotamos entonces a este espacio vectorial mediante el símbolo $L_n(\mathfrak{F})$.

92. Conjuntos ordenados. Consideremos ahora el conjunto ordenado de n escalares u^i pertenecientes al campo $\mathfrak{F}$:

$$\mathbf{U} = [u^1, u^2, \cdots, u^n].$$

Definimos la adición de dichos conjuntos, y su multiplicación por escalares, mediante las ecuaciones

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = [u^1 + v^1, u^2 + v^2, \cdots, u^n + v^n], \tag{1}$$

$$a\mathbf{U} = [au^1, au^2, \cdots, au^n], \tag{2}$$

y denotamos al conjunto nulo mediante

$$\mathbf{0} = [0, 0, \cdots, 0]. \tag{3}$$

Es fácil comprobar ahora que se satisfacen por las n-coordenadas todos los postulados para un espacio vectorial dados anteriormente. Estas n-coordenadas pueden entonces llamarse vectores, y $\mathbf{0}$ es el vector nulo. En conjunto constituyen un espacio vectorial de n-dimensiones, que denotamos con $V_n(\mathfrak{F})$; puesto que los vectores

$$\mathbf{E}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), \quad \mathbf{E}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad \mathbf{E}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1) \tag{4}$$

son evidentemente linealmente independientes y forman una base; tenemos de hecho, de (1) y (2):

$$\mathbf{U} = u^1\mathbf{E}_1 + u^2\mathbf{E}_2 + \cdots + u^n\mathbf{E}_n. \tag{5}$$

Cuando una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ de un sistema lineal $L_n(\mathfrak{F})$ está dada, cualquier vector $\mathbf{u}$ del sistema tiene una representación única

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n. \tag{6}$$

Podemos ahora establecer una correspondencia biunívoca entre los vectores $\mathbf{u}$ de $L_n(\mathfrak{F})$ y los vectores $\mathbf{U}$ de $V_n(\mathfrak{F})$:

$$u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n \leftrightarrow [u^1, u^2, \cdots, u^n]. \tag{7}$$

Esta correspondencia es un *isomorfismo* entre los espacios vectoriales L_n y V_n; puesto que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{U} + \mathbf{V}, \qquad a\mathbf{u} \leftrightarrow a\mathbf{U}.$$

En consecuencia: *Cualquier espacio vectorial de n-dimensiones es isomorfo al espacio vectorial V_n de n-coordenadas en el mismo campo.*

93. Producto interior. Puesto que la longitud y el ángulo no han sido definidos en un espacio vectorial abstracto, estos conceptos no se tienen disponibles para definir el análogo del producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de dos vectores. Puesto que $\lambda\mathbf{u}$ ha sido llamado *producto escalar*, llamamos a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ producto interior. Definimos ahora el producto interior $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de dos vectores de un espacio vectorial $L_n(\mathscr{R})$ sobre el campo $\mathscr{R}$ de los reales, como un escalar que tiene las siguientes propiedades:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{1}$$

$$(\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \tag{2}$$

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \tag{4}$$

De (1) y (3) tenemos también

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}; \tag{3}'$$

y, puesto que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{0}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} : \mathbf{0}$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0. \tag{5}$$

A fin de lograr una notación más compacta y más brevedad, usaremos en lo sucesivo el

CONVENIO DE LA SUMA. *Cualquier término, en el que el mismo índice (superior o inferior) aparezca dos veces, se usará para indicar la suma de todos los términos que se obtienen dando a este índice todos los valores que pueda tomar.*

Consideremos ahora dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ de un espacio vectorial de n-dimensiones $L_n(\mathscr{R})$:

$$\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

Entonces, haciendo uso de las propiedades (1), (2), (3) y (3)', tenemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^i\mathbf{e}_i) \cdot (v^j\mathbf{e}_j) = u^i v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Los productos interiores $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ se definen ahora como

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}, \tag{6}$$

donde los n^2 escalares reales g_{ij} son los coeficientes de una *forma cuadrática definida positiva*:

$$g(x, x) = g_{ij}\, x^i x^j \qquad (g_{ij} = g_{ji}).$$

Para dicha forma $g(x, x) \geqq 0$ para todos los conjuntos $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$; y $g(x, x) = 0$ solamente cuando todas las $x^i = 0$. † Tenemos ahora

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} u^i u^j; \tag{7}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{ij} u^i u^j > 0 \quad \text{if} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \tag{8}$$

y se mantiene la propiedad (4).

Dos vectores no nulos u, v se dicen ortogonales cuando y sólo cuando $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Así, los vectores abstractos ortogonales constituyen una generalización natural de los vectores perpendiculares.

Una base $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ se dice *ortogonal* cuando cada una de las α_i es ortogonal con todas las demás; entonces

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0, \qquad i \neq j. \tag{9}$$

Los vectores de cualquier conjunto ortogonal no nulo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *son linealmente independientes.* Puesto que si los vectores estuviesen conectados por una relación lineal

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = 0,$$

la multiplicación interior por α_i nos daría $\lambda_i \alpha_i \cdot \alpha_i = 0$; y, puesto que $\alpha_i \cdot \alpha_i > 0$, $\lambda_i = 0$.

Cualquier vector v *ortogonal al conjunto* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ *es ortogonal a cada vector del subespacio* L_k *engendrado por ellos:* puesto que

$$\mathbf{v} \cdot (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k) = 0.$$

94. Espacio vectorial euclidiano. A fin de poder hacer medidas en un espacio vectorial abstracto, definimos la longitud de un vector u como

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{g_{ij} u^i u^j}. \tag{1}$$

† Cf. *Vector and Tensor Analysis*, §150. Nótese que $g_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ puesto que, si $x^r = \delta^r_i$, $g(x, x) = g_{ii} > 0$.

Más aún, en analogía con (10.14), definimos el ángulo $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}, \qquad 0 \leqq (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqq \pi. \tag{2}$$

Demostramos ahora que, cuando $g_{ij}x^i x^j$ es una forma cuadrática definida positiva, la longitud definida por (1) tiene las propiedades euclidianas familiares:

$$|\mathbf{u}| > 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}; \qquad |\mathbf{0}| = 0; \tag{3}$$

$$|\lambda \mathbf{u}| = |\lambda|\,|\mathbf{u}|; \tag{4}$$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \text{ (desigualdad del triángulo).} \tag{5}$$

La *positividad* de la longitud, expresada por (3), se deduce inmediatamente de (93.4). La propiedad multiplicativa (4) es una consecuencia inmediata de (1):

$$|\lambda \mathbf{u}| = \sqrt{g_{ij}(\lambda u^i)(\lambda u^j)} = |\lambda|\,|\mathbf{u}|.$$

Para demostrar (5), considérese

$$(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) = |\mathbf{u}^2| + 2\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \lambda^2 |\mathbf{v}|^2 \geqq 0.$$

Puesto que esto puede escribirse como

$$\left(\lambda |\mathbf{v}| + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)^2 + \frac{|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{|\mathbf{v}|^2} \geqq 0,$$

vemos que el miembro izquierdo será $\geqq 0$ para *toda* λ cuando y sólo cuando la última fracción sea $\geqq 0$; esto es,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \qquad \text{(desigualdad de Schwarz).} \tag{6}$$

Usando esta desigualdad, tenemos ahora

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$$
$$\leqq |\mathbf{u}^2| + 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| + |\mathbf{v}^2| = \{|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|\}^2;$$

y, tomando la raíz cuadrada positiva de ambos lados, obtenemos (5).

Como consecuencia de la desigualdad de Schwarz (6), encontramos de (2), que

$$|\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqq 1; \tag{7}$$

así, el único ángulo definido por (2) es siempre real.

Vemos así, que la forma definida positiva $g_{ij}x^ix^j$ nos permite hacer medidas de longitud y de ángulos en nuestro espacio vectorial. Entonces llamamos a $g_{ij}x^ix^j$ la *forma cuadrática métrica* del espacio vectorial; y los n^2 números g_{ij} † se dice que definen la *métrica* del espacio.

Si todos los vectores de una base ortogonal $\mathbf{a}_i$ son de longitud 1, la base $\mathbf{a}_i$ se llama *ortonormal*. Así, la base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ es ortonormal cuando y sólo cuando

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \tag{8}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker δ^j_i de §15. Cuando las componentes de un vector se refieren a una base ortonormal, el producto interior asume la forma más simple

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \delta_{ij}u^iv^j = u^iv^i. \tag{9}$$

Cuando la base es ortonormal, el producto interior de dos vectores es la suma de los productos de sus componentes respectivas:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^1v^1 + u^2v^2 + \cdots + u^nv^n. \tag{9}'$$

Esta es la forma generalizada de (10.13).

En el espacio vectorial $V_n(\mathscr{R})$ de n-coordenadas reales (§92), el producto interior se *define* como

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u^1v^1 + u^2v^2 + \cdots + u^nv^n.$$

Con esta definición los vectores base $\mathbf{E}_i$ forman un conjunto ortonormal puesto que, de (92.4) tenemos, obviamente $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_{ij}$.

En el espacio vectorial V_n $(\mathscr{C})$ de n-coordenadas complejas, el producto interior $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ se define como

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u^1\bar{v}^1 + u^2\bar{v}^2 + \cdots + u^n\bar{v}^n \tag{10}$$

donde $\bar{v}^i$ es el conjugado complejo de v^i. Con esta definición $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} > 0$ si $\mathbf{U} \neq 0$; y $|\mathbf{U}|$, la longitud de $\mathbf{U}$, está dada por la raíz cuadrada positiva de $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$·

$$|\mathbf{U}|^2 = u^1\bar{u}^1 + u^2\bar{u}^2 + \cdots + u^n\bar{u}^n. \tag{11}$$

A menos que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tengan componentes reales, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \neq \neq \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$; en cambio, tenemos *simetría Hermitiana:*

† Debido a la simetría $g_{ij} = g_{ji}$, al menos $\frac{1}{2}n(n+1)$ de los coeficientes g_{ij} tienen valores distintos, puesto que hay n de la forma g_{ii}, y $\frac{1}{2}n(n-1)$ de la forma $g_{ij} (i \neq j)$; y $n + \frac{1}{2}n(n-1 =) \frac{1}{2}n(n+1)$.

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}=\overline{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}; \tag{12}$$

y para todo escalar

$$(\lambda\mathbf{U})\cdot\mathbf{V}=\lambda\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}, \qquad \mathbf{U}\cdot(\lambda\mathbf{V})=\bar{\lambda}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}. \tag{13}$$

Las leyes distributivas,

$$\mathbf{U}\cdot(\mathbf{V}+\mathbf{W})=\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{W}, \qquad (\mathbf{V}+\mathbf{W})\cdot\mathbf{U}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{W}\cdot\mathbf{U},$$

son todavía válidas. Más aún, las desigualdades de Schwarz y del triángulo son válidas. Para demostrar la primera, consideremos

$$(\mathbf{U}+\lambda\mathbf{V})\cdot(\mathbf{U}+\lambda\mathbf{V})=|\mathbf{U}|^2+\lambda\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}+\bar{\lambda}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}+\lambda\bar{\lambda}\,|\mathbf{V}|^2\geqq 0.$$

Puesto que esto puede escribirse como

$$\left(\lambda|\mathbf{V}|+\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}\right)\left(\bar{\lambda}|\mathbf{V}|+\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}}{|\mathbf{V}|}\right)+\frac{|\mathbf{U}|^2|\mathbf{V}|^2-|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}|^2}{|\mathbf{V}|^2}\geqq 0,$$

vemos que el miembro izquierdo será ≥ 0 para *toda* λ cuando y sólo cuando la última fracción sea ≥ 0; obtenemos entonces la desigualdad de Schwarz:

$$|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}|\leqq|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|. \tag{14}$$

La desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{U}+\mathbf{V}|\leqq|\mathbf{U}|+|\mathbf{V}| \tag{15}$$

se deduce ahora de (14):

$$\begin{aligned}|\mathbf{U}+\mathbf{V}|^2&=(\mathbf{U}+\mathbf{V})\cdot(\mathbf{U}+\mathbf{V})=|\mathbf{U}|^2+\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}+|\mathbf{V}|^2\\&=|\mathbf{U}|^2+\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}+\overline{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}+|\mathbf{V}|^2\\&\leqq|\mathbf{U}|^2+2|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}|+|\mathbf{V}|^2\\&\leqq|\mathbf{U}|^2+2|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|+|\mathbf{V}|^2=\{|\mathbf{U}|+|\mathbf{V}|\}^2.\end{aligned}$$

Si $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \cdots, \mathbf{U}_k$ son k vectores de $V_n(\mathscr{C})$, su Gramiano es el determinante

$$G_k=\begin{vmatrix}\mathbf{U}_1\cdot\mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2\cdot\mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_k\cdot\mathbf{U}_1\\ \mathbf{U}_1\cdot\mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_2\cdot\mathbf{U}_2 & \cdots & \mathbf{U}_k\cdot\mathbf{U}_2\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \mathbf{U}_1\cdot\mathbf{U}_k & \mathbf{U}_2\cdot\mathbf{U}_k & \cdots & \mathbf{U}_k\cdot\mathbf{U}_k\end{vmatrix} \tag{16}$$

De (12), vemos que $\overline{G}_k$ se obtiene de G_k mediante un intercambio de líneas y columnas. Así, $\overline{G}_k = G_k$; por lo tanto, un *Gramiano es un escalar* real. †

TEOREM. *Una condición necesaria y suficiente para que* $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \cdots, \mathbf{U}_k$ *sean linealmente dependientes es que su Gramiano se anule.*

Demostración. La condición es necesaria puesto que, si existen k constantes c_i, no todas ellas son cero, tales que

$$c_1\mathbf{U}_1 + c_2\mathbf{U}_2 + \cdots + c_k\mathbf{U}_k = \mathbf{0}, \tag{17}$$

tenemos las k ecuaciones homogéneas

$$c_1\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_i + \cdots + c_k\mathbf{U}_k \cdot \mathbf{U}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{18}$$

Puesto que las c no son todas cero, el determinante G_k del sistema (18) debe anularse.

La condición $G_k = 0$ es también suficiente. Puesto que el sistema (18),

$$(c_1\mathbf{U}_1 + \cdots + c_k\mathbf{U}_k) \cdot \mathbf{U}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, k,$$

tiene el determinante nulo G_k y, por lo tanto, debe admitir una solución $c_1, c_2, \cdots, c_k$ que no consista en ceros. Si multiplicamos estas ecuaciones por $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_k$, respectivamente, y sumamos después usando (13), la ecuación resultante,

$$(c_1\mathbf{U}_1 + \cdots + c_k\mathbf{U}_k) \cdot (c_1\mathbf{U}_1 + \cdots + c_k\mathbf{U}_k) = 0,$$

implica (17).

95. Proceso de Gram-Schmidt. Si los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ forman una base para un espacio vectorial euclidiano, podemos derivar de ellos mediante procesos racionales una base ortogonal $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ que engendre el mismo espacio. La construcción, conocida como el *proceso de Gram-Schmidt*, consiste en formar la sucesión de vectores

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2, \quad \cdots,$$

† $G_1 = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_1 \geqq 0$; y $G_2 \geqq 0$ de (14). Veremos después (§98) que, en general, $G_k \geqq 0$.

y, en general

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i} \mathbf{a}_i. \tag{1}$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ no son cero, estas ecuaciones muestran que el subespacio L_{k-1} que engendran, es el mismo engendrado por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_{k-1}$. Ahora, si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ forman un conjunto ortogonal, lo mismo es válido cuando se añade α_k, puesto que, de (1)

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{a}_j - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{a}_j = 0 \qquad (j < k).$$

Más aún, $\alpha_k \neq \mathbf{0}$; puesto que si $\alpha_k = \mathbf{0}$, (1) implica que $\mathbf{e}_k$ es un vector del subespacio L_{k-1} engendrado por $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ (o por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_k$) y $\mathbf{e}_k$ no podría ser un vector de la base. Así, si la construcción tiene éxito para $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$, también lo tendrá para $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$; y, puesto que $\alpha_2 \neq \mathbf{0}$ y $\alpha_2 \cdot \alpha_1 = 0$, tenemos una demostración por inducción para su validez general.

De la base ortogonal α_i podemos formar ahora la base *ortonormal* $\mathbf{b}_i = \alpha_i/|\alpha_i|$; puesto que los $\mathbf{b}_i$ son ortogonales y de longitud 1.

En vista de (12.3) podemos interpretar al término

$$\frac{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i} \mathbf{a}_i = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{b}_i)\, \mathbf{b}_i$$

como la proyección de $\mathbf{e}_k$ sobre α_i; así, (1) establece que

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{\mathbf{a}_i} \mathbf{e}_k. \tag{1}$$

Así, la construcción de Gram-Schmidt se reduce simplemente a esto: tómese $\alpha_1 = \mathbf{e}_1$; tómese α_2 como $\mathbf{e}_2$ menos su proyección sobre α_1; tómese α_3 como $\mathbf{e}_3$ menos su proyección sobre α_2 y α_3; y así sucesivamente hasta terminar con las $\mathbf{e}$.

96. Bases recíprocas. Podemos ahora generalizar a los espacios vectoriales abstractos el concepto de bases recíprocas (§15).

Dos bases $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \cdots, \mathbf{e}^n$ del mismo espacio vectorial se dice que son *recíprocas* cuando satisfacen las n^2 ecuaciones:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j. \tag{1}$$

Puesto que los $\mathbf{e}^i$ son vectores del espacio engendrado por $\mathbf{e}_i$, tenemos (usando el convenio de la suma),

$$\mathbf{e}^i = \lambda^{ik}\mathbf{e}_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

Entonces, de (93.6),

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \lambda^{ik}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \lambda^{ik}g_{jk},$$

o, de (1),

$$\lambda^{ik}g_{jk} = \delta^i_j \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{3}$$

A fin de resolver estas ecuaciones para las n^2 lambdas, introducimos el cofactor reducido g^{ij} de g_{ij} en el determinante

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

El *cofactor* G^{ij} de g_{ij} se obtiene mediante la eliminación de la columna j y la fila i en el determinante y dando al menor resultante el signo $(-1)^{i+j}$; entonces el cofactor *reducido* es

$$g^{ij} = G^{ij}/g. \tag{4}$$

Nótese que $g_{ij} = g_{ji}$ implica que $g^{ij} = g^{ji}$.

Un teorema fundamental establece que, si los elementos de una fila (o columna), se multiplican por su cofactor correspondiente, obtenemos g; pero, si los elementos de una fila (o columna), se multiplican por los cofactores correspondiente de otra fila (o columna), obtenemos cero. Con la ayuda del convenio de la suma todo esto se expresa así:

$$g_{ir}G^{jr} = g_{ri}G^{rj} = \delta^j_i g,$$

o, en términos de cofactores reducidos,

$$g_{ir}g^{jr} = g_{ri}g^{rj} = \delta^j_i. \tag{5}$$

En estas ecuaciones, r es un índice de suma.

Volvemos ahora a las n^2 ecuaciones (3). Multiplicando (3) por g^{jh}, tenemos

$$\lambda^{ik}g_{jk}g^{jh} = \delta^i_j g^{jh}.$$

Sumando en j y k, de acuerdo con el convenio, obtenemos

$$\lambda^{ik}g_{jk}g^{jh} = \lambda^{ik}\delta^h_k = \lambda^{ih}, \qquad \delta^i_j g^{jh} = g^{ih};$$

entonces $\lambda^{ih} = g^{hi}$, y, de (2),

$$\mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k. \tag{6}$$

Es fácil comprobar (6), puesto que

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = g^{ik}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = g^{ik}g_{jk} = \delta^i_j.$$

Si multiplicamos interiormente (6) por $\mathbf{e}^i$, tenemos

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ik}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^j = g^{ik}\delta^j_k = g^{ij} \tag{7}$$

Si tomamos a $\mathbf{e}^i$ como los vectores de la base original con la métrica g^{ij}, la base recíproca es $\mathbf{e}_i$ y las ecuaciones (6) se convierten en

$$\mathbf{e}_i = g_{ik}\mathbf{e}^k. \tag{8}$$

Este resultado también se comprueba fácilmente resolviendo las ecuaciones (6) para $\mathbf{e}_j$ multiplicando ambos miembros por g_{ij}:

$$\mathbf{e}^i g_{ij} = g_{ij}g^{ik}\mathbf{e}_k = \delta^k_j \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j.$$

Un vector $\mathbf{u}$, referido a bases recíprocas, tiene ahora dos formas:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n \\ u_1\mathbf{e}^1 + u_2\mathbf{e}^2 + \cdots + u_n\mathbf{e}^n. \end{cases} \tag{9}$$

Estas ecuaciones muestran que las componentes de $\mathbf{u}$ son

$$u^i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i, \qquad u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{10}$$

Si ponemos ahora $\mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_i = g_{ik}\mathbf{e}^k$ en (10), obtenemos también las ecuaciones

$$u^i = g^{ik}u_k, \qquad u_i = g_{ik}u^k, \tag{11}$$

que nos permiten pasar de un tipo de componente a otro sin intervención de los vectores de la base.

La simplicidad de la fórmula (94.9′) para el producto interior $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ referido a una base ortonormal puede ahora recu-

perarse, puesto que, si referimos u a una base y v a la base recíproca, tenemos,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (u_i\mathbf{e}^i)\cdot(v^j\mathbf{e}_j) = u_i v^j \delta^i_j = u_i v^i,$$

o

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (u^i\mathbf{e}_i)\cdot(v_j\mathbf{e}^j) = u^i v_j \delta^j_i = u^i v_i;$$

entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \begin{cases} u_1v^1 + u_2v^2 + \ldots + u_nv^n \\ u^1v_1 + u^2v_2 + \cdots + u^nv_n. \end{cases} \tag{12}$$

Finalmente, notamos que, para una base ortonormal α_i,

$$g_{ij} = \delta^j_i = g^{ij} \tag{93.8},$$

y, entonces, $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ de (6). Inversamente, si

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i, \qquad g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j = \delta^i_j.$$

Entonces: *Una base es recíproca consigo misma cuando y sólo cuando es ortonormal.*

PROBLEMAS

1. Si la métrica está dada por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3/2 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

encontrar las longitudes y los ángulos entre los vectores $\mathbf{e}_i$ de la base.

2. (*a*) Encontrar g^{ij} correspondiente a g_{ij} en el Prob. 1.
(*b*) Expresar a $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ linealmente en términos de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

3. Si $u^i = [0, 1, 2]$, $v^i = [-1, 0, 1]$ y g_{ij} tiene los valores del Prob. 1, calcular.
(*a*) u_i y v_i;
(*b*) $|\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{v}|$ de dos maneras;
(*c*) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ de cuatro maneras;
(*d*) el ángulo $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

4. Si $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcular
(*a*) g_{ij} y g^{ij};
(*b*) $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$;
(*c*) las componentes $\mathbf{u}^i$ y $\mathbf{u}_i$ de $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Comprobar encontrando $|\mathbf{u}|$ de dos maneras.

5. Si la base $\mathbf{e}_i$ se cambia por $\bar{\mathbf{e}}_i$ mediante la transformación lineal no singular

(13) $$\bar{\mathbf{e}}_i = c_i^j \mathbf{e}_j, \qquad c = \det c_i^j \neq 0,$$

demostrar que las componentes u^i de cualquier vector se transforman de acuerdo con

(14) $$u^i = c_j^i \bar{u}^j$$

debido a la invariancia del vector $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i = \bar{u}^j \bar{\mathbf{e}}_j$.

Demostrar también que

(15) (16) $$\bar{u}_i = c_i^j u_j, \qquad \mathbf{e}^i = c_j^i \bar{\mathbf{e}}^j.$$

6. En el Prob. 5, demostrar que los vectores $\bar{\mathbf{e}}_i$ forman de hecho una base nueva: esto es, que son *linealmente independientes.*

7. Si γ_j^i es el cofactor reducido de c_i^j en el det c_i^j, demostrar que (14) y (16) pueden ser escritos como

(14)'(16)' $$\bar{u}^i = \gamma_j^i u^j, \qquad \bar{\mathbf{e}}^i = \gamma_j^i \mathbf{e}^j.$$

8. Si la base α_i es ortonormal, y la transformación

(15) $$\bar{\mathbf{a}}_i = c_i^j \mathbf{a}_j, \qquad c = \det c_i^j \neq 0,$$

conduce a una nueva base ortonormal $\bar{\alpha}_i$, demostrar que $c_i^j = \gamma_j^i$; esto es, que *cada elemento* c_i^j *en el determinante* det c_i^j *es su propio cofactor.*

[$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}^i, \bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{a}}^i$.]

9. Una transformación lineal entre bases ortonormales se dice que es torogonal. Si C es la matriz (c_i^j) de una transformación ortogonal y C' es la transposición de C (filas y columnas intercambiadas), demostrar que

$$(a) \quad CC' = I(\text{matriz unitaria}); \qquad (b) \quad c^2 = 1.$$

10. Demostrar que en tres dimensiones el determinante c de una transformación ortogonal es 1 cuando la transformación *gira* el triedro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$.

97. Espacio de Hilbert. Una sucesión $u_1, u_2, \cdots$ de escalares reales o complejos, para la cual converja la serie infinita $\Sigma|u_i|^2$, se llama un vector

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, \cdots]$$

que tiene $u_1, u_2, \cdots$ como componentes. El producto de $\mathbf{U}$ por un escalar y la suma $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ se definen por

(1) $$a\mathbf{U} = [au_1, au_2, \cdots],$$

(2) $$\mathbf{U} + \mathbf{V} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots].$$

Puesto que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |au_i|^2 = a^2 \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2,$$

$a\mathbf{U}$ es un vector. Más aún, la suma $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ de dos vectores es un vector, puesto que demostraremos que $\Sigma|u_i + v_i|^2$ converge. El vector nulo es

$$\mathbf{0} = [0, 0, \cdots], \tag{3}$$

y el negativo (inverso aditivo) de $\mathbf{U}$,

$$-\mathbf{U} = [-u_1, -u_2, \cdots]. \tag{4}$$

Con estas definiciones se satisfacen todos los postulados de §88; y la totalidad de dichos vectores constituye el *espacio vectorial de Hilbert.*

Definimos ahora el producto interior $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ y la longitud $|\mathbf{U}|$ de $\mathbf{U}$ mediante una extensión directa de las definiciones en §94:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots, \tag{5}$$

$$|\mathbf{U}|^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + \cdots. \tag{6}$$

Puesto que $u_i\bar{u}_i = |u_i|^2$, la existencia de $|\mathbf{U}|$ se implica por la convergencia de $\Sigma|u_i|^2$. Para tratar con la serie en (5), aplicamos la desigualdad de Schwarz (94.14) a los vectores finitos:

$$\mathbf{U}_n = [|u_1|, |u_2|, \cdots, |u_n|],$$
$$\mathbf{V}_n = [|v_1|, |v_2|, \cdots, |v_n|];$$

entonces $|\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V}_n| \leqq |\mathbf{U}_n||\mathbf{V}_n|$ se convierte en

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}.$$

Puesto que esto es válido para cualquier n, es válido cuando $n \to \infty$; y puesto que $|u_i v_i| = |u_i v_i|$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i\bar{v}_i| \leqq |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|. \tag{7}$$

Así, la serie en (5) converge absolutamente y por lo tanto converge también en el sentido usual † a una suma definida como $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$. Más aún

† *Advanced Calculus*, p. 63.

$$|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} u_i\bar{v}_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |u_i\bar{v}_i|,$$

y, en consecuencia, de (7)

$$|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}| \leqq |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|; \tag{8}$$

ésta es la desigualdad de Schwarz en el espacio de Hilbert.

La ley distributiva

$$\mathbf{U}\cdot(\mathbf{V}+\mathbf{W}) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{V} + \mathbf{U}\cdot\mathbf{W}$$

es obviamente válida para tres vectores, puesto que hemos visto que las series para $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}$ y $\mathbf{U}\cdot\mathbf{W}$ convergen. En particular

$$(\mathbf{U}+\mathbf{V})\cdot(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\mathbf{V} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{V},$$

muestra que la serie para $(\mathbf{U}+\mathbf{V})\cdot(\mathbf{U}+\mathbf{V})$ converge; entonces la suma de dos vectores es un vector (como se establece arriba). La desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{U}+\mathbf{V}| \leqq |\mathbf{U}| + |\mathbf{V}| \tag{9}$$

se deduce ahora de (8) de la misma manera que en §94.

Los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ se dicen *ortogonales* cuando $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = 0$. El conjunto de vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$ se dicen *ortonormales* cuando

$$\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{A}_j = \delta_{ij}. \tag{10}$$

Un vector $\mathbf{U}$ se dice entonces que tiene las componentes $\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{U}:\mathbf{A}_n$ relativas a este conjunto.

Sean ahora $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ n escalares arbitrarios, y consideremos el vector

$$\mathbf{T}_n = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{A}_n. \tag{11}$$

Nos proponemos encontrar los valores λ_i que hagan de $\mathbf{T}_n$ la mejor aproximación de $\mathbf{U}$ en el sentido de los mínimos cuadrados; esto es, aquellos valores para los cuales la longitud elevada al cuadrado

$$D_n = |\mathbf{U}-\mathbf{T}_n|^2 = (\mathbf{U}-\mathbf{T}_n)\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{T}_n) \geqq 0$$

tome su valor mínimo. Haciendo uso de (10) y (94.3) encontramos que

$$D_n = \mathbf{U}\cdot\mathbf{U} - \mathbf{U}\cdot\mathbf{T}_n - \mathbf{T}_n\cdot\mathbf{U} + \mathbf{T}_n\cdot\mathbf{T}_n$$

$$= |\mathbf{U}|^2 - \sum_{i=1}^{n} (\bar{\lambda}_i \mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i + \lambda_i \mathbf{A}_i\cdot\mathbf{U}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\bar{\lambda}_i.$$

Puesto que $\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i}$, esto puede escribirse como

$$D_n = |\mathbf{U}|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i)(\bar{\lambda}_i - \overline{\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i}) - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i)(\overline{\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i})$$

$$= |\mathbf{U}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i|^2.$$

Así, D_n asumirá su valor mínimo cuando $\lambda_i = \mathbf{U}:\mathbf{A}\cdot$ entonces $\mathbf{T}_n$ se convierte en

$$\mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_i, \tag{12}$$

y este valor mínimo es

$$\min D_n = |\mathbf{U} - \mathbf{S}_n|^2 = |\mathbf{U}|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i|^2. \tag{13}$$

Hemos entonces demostrado el

TEOREMA 1. *Para cualquier n dada, la suma* $\mathbf{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{A}_i$ *es la mayor aproximación a* $\mathbf{U}$ *cuando los escalares* $\lambda_i = \mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i$ *son las componentes de* $\mathbf{U}$ *en la base ortonormal* $\mathbf{A}_i$.

Si la base ortonormal $\mathbf{A}_i$ contiene un número infinito de vectores, los términos para la mejor aproximación para un conjunto dado $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$ se retienen cuando este conjunto se aumenta con otros. Puesto que $D_n \geq 0$, y n puede tomarse arbitrariamente grande, (13) demuestra también la *desigualdad de Bessel:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i|^2 \leqq |\mathbf{U}|^2, \tag{14}$$

y al mismo tiempo muestra que las componentes $\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}$ forman una sucesión nula.

La base ortonormal $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots$ se dice que es cerrada si

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{U} - \mathbf{S}_n| = 0 \tag{15}$$

para todos los vectores **U**. De (13) tenemos ahora el

TEOREMA 2. *Una condición necesaria y suficiente para que la base ortonormal* $\mathbf{A}_i$ *sea cerrada es que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_i|^2 = |\mathbf{U}|^2. \tag{16}$$

Esta se llama la *ecuación de Parseval;* corresponde al signo de igual en la desigualdad de Bessel y es una generalización del teorema de Pitágoras a un espacio de un número infinito de dimensiones.

Una base ortonormal se llama *completa* cuando no existe ningún vector no nulo que sea ortogonal a todos los vectores de la base.

TEOREMA 3. *Toda base cerrada es completa.*

Demostración. Si un vector **U** fuese ortogonal a cada vector $\mathbf{A}_i$ de la base de un conjunto ortonormal, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_i = 0$ y $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ por la ecuación de Parseval (16). Por lo tanto no existe ningún vector no nulo que sea ortogonal a todos los vectores de la base.

DEFINICIÓN. Una sucesión de vectores $\{\mathbf{U}_n\}$ se dice que converge rápidamente a un vector **U** cuando

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{U} - \mathbf{U}_n| = \mathbf{0}; \tag{17}$$

y escribimos $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \mathbf{U}_n = \mathbf{U}$. †

Así, la condición (15) para la cerradura de una base ortonormal $\mathbf{A}_i$ puede escribirse

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_i)\mathbf{A}_i = \mathbf{U}$$

para todos los vectores **U**.

LEMA 1. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia de* $\operatorname{Lim} \mathbf{U}_n$ *es que a toda* $\varepsilon > 0$ *corresponda un entero N tal que*

$$|\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_m| < \varepsilon \text{ for } m, n > N. \tag{18}$$

† Nótese la L mayúscula en Lim.

Demostración. La condición es *necesaria*, puesto que, si $\operatorname{Lim} \mathbf{U}_n = \mathbf{U}$,

$$|\mathbf{U} - \mathbf{U}_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{Cuando } n > N.$$

Entonces, cuando $m, n > N$,

$$|\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_m| = |(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}) + (\mathbf{U} - \mathbf{U}_m)| \leqq |\mathbf{U}_n - \mathbf{U}| + |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m| < \varepsilon.$$

Para demostrar que la condición es *suficiente*, observamos primero, si $\mathbf{U}_n = [u_{n1}, u_{n2}, \cdots]$, (18) muestra que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ni} - u_{mi}|^2 < \varepsilon^2, \qquad m, n > N;$$

en consecuencia

$$|u_{ni} - u_{mi}| < \varepsilon, \qquad m, n > N, \qquad i = 1, 2, 3, \cdots,$$

y $\lim_{n\to\infty} u_{ni}$ existe, por el criterio de Cauchy: † denotémoslo con u_i. Entonces, si hacemos $n \to \infty$ en la suma de p términos

$$\sum_{i=1}^{p} |u_{ni} - u_{mi}|^2 < \varepsilon^2, \qquad m, n > N,$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^{p} |u_i - u_{mi}|^2 \leqq \varepsilon^2, \qquad m > N.$$

Como esto es válido para toda p, tenemos también

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i - u_{mi}|^2 \leqq \varepsilon^2, \qquad m > N,$$

o, escribiendo $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \cdots)$,

$$\lim_{m\to\infty} |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m| = 0.$$

Más aún, $\mathbf{U}$ es un vector, puesto que $\mathbf{U} - \mathbf{U}_m (m > N)$ y $\mathbf{U}_m$ son vectores, y por lo tanto, su suma es un vector.

LEMA 2. Si $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \mathbf{U}_n = \mathbf{U}$, $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \mathbf{V}_n = \mathbf{V}$, entonces

† *Advanced Calculus*, §17.

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n) = \mathbf{U} + \mathbf{V}, \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{V}_n) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}. \tag{20}$$

Demostración de (19). Escojamos N tal que

$$|\mathbf{U} - \mathbf{U}_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad |\mathbf{V} - \mathbf{V}_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad n > N.$$

Entonces, por la desigualdad del triángulo (9),

$$|\mathbf{U} + \mathbf{V} - \mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n| \leqq |\mathbf{U} - \mathbf{U}_n| + |\mathbf{V} - \mathbf{V}_n| < \varepsilon, \qquad n > N.$$

Demostración de (20). Puesto que

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} - \mathbf{U}_n\cdot\mathbf{V}_n = (\mathbf{U} - \mathbf{U}_n)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{U}\cdot(\mathbf{V} - \mathbf{V}_n) - (\mathbf{U} - \mathbf{U}_n)\cdot(\mathbf{V} - \mathbf{V}_n),$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} - \mathbf{U}_n\cdot\mathbf{V}_n| &\leqq |(\mathbf{U} - \mathbf{U}_n)\cdot\mathbf{V}| + |\mathbf{U}\cdot(\mathbf{V} - \mathbf{V}_n)| \\ &\quad + |(\mathbf{U} - \mathbf{U}_n)\cdot(\mathbf{V} - \mathbf{V}_n)| \\ &\leqq |\mathbf{U} - \mathbf{U}_n|\,|\mathbf{V}| + |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V} - \mathbf{V}_n| + |\mathbf{U} - \mathbf{U}_n|\,|\mathbf{V} - \mathbf{V}_n|, \end{aligned}$$

haciendo uso de la desigualdad de Schwarz (8). Escojamos ahora N tal que

$$|\mathbf{U} - \mathbf{U}_n| \quad \text{y} \quad |\mathbf{V} - \mathbf{V}_n| < \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{|\mathbf{U}| + |\mathbf{V}|}, \qquad n > N;$$

entonces

$$|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} - \mathbf{U}_n\cdot\mathbf{V}_n| \leqq \varepsilon\left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4(|\mathbf{U}| + |\mathbf{V}|)^2}\right] < \varepsilon, \qquad n > N,$$

dado que $\varepsilon < 2(|\mathbf{U}| + |\mathbf{V}|)^2$.

Estamos ahora en posibilidad de demostrar el

TEOREMA 4. *Toda base completa es cerrada.*

Demostración. Si $\mathbf{U}$ es cualquier vector y $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots$ una base ortonormal completa, consideremos el vector $\mathbf{S}_n$ en (12). A medida que $n \to \infty$, $\mathbf{S}_n$ converge rápidamente a un vector límite $\mathbf{S}$. Puesto que, si $m < n$,

$$|\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_m|^2 = \left(\sum_{i=m}^{n} (\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_i\right)\cdot\left(\sum_{i=m}^{n} (\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_i\right)$$

$$= \sum_{i=m}^{n} (\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i)\overline{(\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i)} = \sum_{i=m}^{n} |\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}_i|^2;$$

y, puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_i|^2$ converge por (14), podemos escoger un entero N tal que la última suma sea $< \varepsilon^2$ cuando m, $n > N$. Entonces,

$$|\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_m| < \varepsilon, \qquad m, n > N;$$

y, por el lema 1, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{S}_n = \mathbf{S}$. Ahora, de (19),

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{U} - \mathbf{S}_n) = \mathbf{U} - \mathbf{S};$$

y, puesto que

$$(\mathbf{U} - \mathbf{S}_n) \cdot \mathbf{A}_i = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_i - \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_i = 0 \quad \text{cuando} \quad n \geqq i,$$

tenemos, haciendo $n \to \infty$,

$$(\mathbf{U} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{A}_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \cdots,$$

de (20). Así, $\mathbf{U} - \mathbf{S}$ es ortogonal a todos los vectores base $\mathbf{A}_i$; y, puesto que la base es completo, $\mathbf{U} - \mathbf{S} = \mathbf{0}$. De nuevo, de (20) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{U} - \mathbf{S}_n) \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{S}_n) = (\mathbf{U} - \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{S}) = 0.$$

Puesto que esto implica (15), la base es cerrada.

Las componentes de $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \cdots]$ relativas a la base ortonormal

$$(21) \qquad \mathbf{E}_1 = [1, 0, 0, \cdots], \quad \mathbf{E}_2 = [0, 1, 0, \cdots], \quad \cdots,$$

son obviamente $\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}_i = u_i$; y, puesto que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \bar{u}_i = |\mathbf{U}|^2$$

de (6), se satisface la ecuación de Parseval (16). La base (21) es, por lo tanto, cerrada y completa.

98. Ecuaciones lineales. Consideremos el conjunto de n ecuaciones homogéneas

$$(1) \qquad \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_2 = 0, \quad \cdots, \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_n = 0,$$

donde $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$ son n vectores en el espacio de Hilbert y $\mathbf{X}$ es un vector que debe determinarse.

TEOREMA 1. *Si* $\mathbf{X}$ *satisface las ecuaciones* (1) *y es linealmente dependiente de* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$, *entonves* $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Demostración. Si $\mathbf{X} = c_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c_n\mathbf{A}_n$, es una solución de (1),

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \bar{c}_1\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_1 + \cdots + \bar{c}_n\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_n = 0,\dagger$$

y, por lo tanto $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

TEOREMA 2. *Si los n vectores* $\mathbf{A}_i$ *son linealmente independientes, la solución general de las ecuaciones* (1) *es*

$$(2) \qquad \mathbf{X} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_n & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{A}_n & \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n & \mathbf{U} \end{vmatrix}}{G(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)}$$

donde $\mathbf{U}$ *es un vector arbitrario y* $\mathbf{G}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)$ *es el gramiano de* $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n$ (*el cofactor de* $\mathbf{U}$ *en el numerador*).

Demostración. La demostración del teorema 94 se aplica sin ningún cambio al espacio de Hilbert; entonces $\mathbf{G}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n) \neq 0$. Si desarrollamos el determinante del numerador de (2) por los elementos del último renglón, tenemos

$$(3) \qquad \mathbf{X} = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \cdots + c_n\mathbf{A}_n + \mathbf{U}.$$

Puesto que $\mathbf{U}$ es arbitrario, cualquier vector, y consecuentemente cualquier solución de las ecuaciones (1) puede ponerse en esta forma. Ahora, si formamos $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_i$ de (2), el determinante del numerador tendrá los mismos elementos en la i-ésima y última línea y $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Vamos a indicar la dependencia de la solución $\mathbf{X}$ en (2) sobre $\mathbf{U}$ escribiendo $\mathbf{X}(\mathbf{U})$. Ahora, de (3) y del Teorema 1, vemos que $\mathbf{X}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$ cuando y sólo cuando $\mathbf{U}$ depende linealmente de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$. Más aún, (3) muestra que

† En todo este artículo deben recordarse las ecuaciones (94.13).

$$\mathbf{X}(\mathbf{U}_1) - \mathbf{X}(\mathbf{U}_2) = \mathbf{X}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2); \tag{4}$$

entonces $\mathbf{X}(\mathbf{U}_1) = \mathbf{X}(\mathbf{U}_2)$ cuando y sólo cuando $\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2$ sea linealmente dependiente de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$.

De (3) tenemos

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = \bar{c}_1\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}_1 + \bar{c}_2\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}_2 + \cdots + \bar{c}_n\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}_n + \mathbf{X}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{X}\cdot\mathbf{U},$$

en vista de las ecuaciones (1); pero, si calculamos $\mathbf{X}\cdot\mathbf{U}$ a partir de (2), tenemos

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = \frac{G(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n, \mathbf{U})}{G(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)}. \tag{5}$$

Ahora, esta ecuación se aplica a $n+1$ vectores cualesquiera que sean linealmente independientes, digamos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n+1}$. Entonces ambos gramianos son $\neq 0$, y tenemos, con una notación obvia,

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = G_{n+1}/G_n > 0, \tag{6}$$

para $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, puesto que $\mathbf{A}_{n+1}$ por hipótesis, no es linealmente dependiente de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$. Consecuentemente, si $G_n > 0$, también $G_{n+1} > 0$. Pero $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{0}$ puesto que las $\mathbf{A}$ son linealmente independientes; entonces $G_1 = \mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_1 > 0$. Con este punto de partida, podemos ahora demostrar por inducción el

TEOREMA 3. *El gramiano de cualquier número de vectores linealmente independientes es positivo.*

Finalmente, consideremos las ecuaciones no homogéneas

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{A}_1 = b_1, \qquad \mathbf{Y}\cdot\mathbf{A}_2 = b_2, \qquad \cdots, \qquad \mathbf{Y}\cdot\mathbf{A}_n = b_n. \tag{7}$$

TEOREMA 4. *Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$ son linealmente independientes, la única solución de las ecuaciones (7) de la forma*

$$\mathbf{Y}_0 = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \cdots + c_n\mathbf{A}_n \tag{8}$$

está dada por

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_n\cdot\mathbf{A}_1 & -b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_n & \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_n & \cdots & \mathbf{A}_n\cdot\mathbf{A}_n & -b_n \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n & 0 \end{vmatrix}}{G(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)} \tag{9}$$

Demostración. Si calculamos $\mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{A}_i$ de (9), la última fila del determinante de arriba se convierte en

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_i, \quad \cdots, \quad \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{A}_i, \quad 0;$$

y, cuando la í-ésima fila se resta de ésta, tenemos

$$0, \quad 0, \quad \cdots, \quad 0, \quad b_i;$$

entonces

$$\mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{A}_i = \frac{b_i G_n}{G_n} = b_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

y se satisfacen las ecuaciones (7). Si hubiese una segunda solución $\mathbf{Y}_1$ de la forma (8), $\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}_1$ sería una solución de las ecuaciones (1), linealmente dependiente de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n$, e $\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}_1$ se anularía. Así, $\mathbf{Y}_0$ es la única solución que tiene la forma (8).

La solución general $\mathbf{Y}$ de las ecuaciones (7) se obtiene sumando la solución particular $\mathbf{Y}_0$ a la solución general $\mathbf{X}$ de las ecuaciones homogéneas (1):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}_0. \tag{10}$$

Llamaremos a $\mathbf{Y}_0$ la solución principal de las ecuaciones (7). Se caracteriza por la siguiente propiedad.

TEOREMA 5. *De todos los vectores que satisfacen las ecuaciones* (7), *la solución principal tiene la longitud mínima.*

Demostración. De (10),

$$|\mathbf{Y}|^2 = (\mathbf{X} + \mathbf{Y}_0) \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y}_0) = |\mathbf{X}|^2 + |\mathbf{Y}_0|^2;$$

puesto que, de (8)

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}_0 = \bar{c}_1 \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_1 + \cdots + \bar{c}_n \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_n = 0,$$

e $\mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{X} = \overline{\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}_0} = 0$. Entonces

$$|\mathbf{Y}|^2 \geqq |\mathbf{Y}_0|^2, \tag{11}$$

siendo válido el signo de igualdad solamente cuando $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, en cuyo caso $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0$.

Los resultados anteriores pueden extenderse a un número infinito de ecuaciones. †

† Cf. Bocher y Brand, 'On Linear Equations with an Infinite Number of Variables", *Ann. Math.*, vol. 13, 1912, pp. 167-186.

PROBLEMAS

1. Demostrar que, si las ecuaciones (1) tienen una solución de la forma (3), debe estar dada por (2). [Usar la regla de Cramer.]

2. Demostrar que, si las ecuaciones (7) tienen una solución de la forma (8), debe estar dada por (9).

3. Si los vectores $\mathbf{A}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, 0, 0, \cdots]$, demostrar que

$$G(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n) = |\det a_{ij}|^2, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

APENDICE

CANTIDADES, DIMENSIONES Y UNIDADES

Cantidad	Símbolo	M	L	T	Q	Unidad
Masa	m	1				kilogramo (kg)
Longitud	l		1			metro (m)
Tiempo	t			1		Segundo (seg)
Frecuencia	f			-1		
Velocidad	$\mathbf{v}$		1	-1		metro/seg
Aceleración	$\mathbf{a}$		1	-2		metro/seg^2
Fuerza	$\mathbf{f}$, $\mathbf{F}$	1	1	-2		newton
Momento	$m\mathbf{v}$	1	1	-1		kg m/seg
Trabajo	W	1	2	-2		joule
Energía	E	1	2	-2		joule
Par (torque)	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$	1	2	-2		newton-metro
Potencia	P	1	2	-3		watt
Carga	q				1	coulomb
Densidad de carga	ρ		-3		1	coulomb/metro^3
Corriente	I			-1	1	ampere
Densidad de corriente	$\mathbf{J}$		-2	-1	1	ampere/metro^3
Intensidad eléctrica	$\mathbf{E}$	1	1	-2	-1	volt/metro
Intensidad magnética	$\mathbf{H}$		-1	-1	1	ampere/metro
Permitividad	ε	-1	-3	2	2	farad/metro
Permeabilidad	μ	1	1		-2	henry/metro
Densidad de flujo eléctrico	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$		-2		1	coulomb/metro^2
Densidad de flujo magnético	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$	1		-1	-1	weber/metro^2
Flujo magnético	$\Phi \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}\, dS$	1	2	-1	-1	weber
Fem	V	1	2	-2	-1	volt
Potencial	φ	1	2	-2	-1	volt
Potencial vectorial	$\mathbf{A}$	1	1	-1	-1	weber/metro
Resistencia	R	1	2	-1	-2	ohm
Conductancia	$1/R$	-1	-2	1	2	mho
Capacidad	C	-1	-2	2	2	farad
Inductancia	$\mathcal{L}$	1	2		-2	henry
Conductividad	σ	-1	-3	1	2	mho/metro

Problemas Suplementarios

Comprobar las siguientes proposiciones:

1. Si $P_1, P_2, \cdots, P_6$ son seis puntos en el espacio y $Q_1, Q_2, \cdots, Q_6$ son los centros medios de los triángulos $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4, \cdots, P_6P_1P_2$, demostrar que $Q_1Q_2 \cdots Q_6$ es un hexágono cuyos lados opuestos son iguales y paralelos.

2. Los seis planos que pasan por los puntos medios de las aristas de un tetraedro $OABC$ concurren en un punto P si son perpendiculares a dichas aristas o a las aristas opuestas. Si $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ es el conjunto recíproco a los vectores de posición $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$,

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\,\mathbf{a}' + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\,\mathbf{b}' + \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{c}'),$$

o

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{a}' + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})\mathbf{b}' + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}').$$

3. Si P es un punto en el plano del triángulo ABC y

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}, \qquad \alpha + \beta + 1 = 1 \text{ (Teorema 5.2)},$$

los números α, β, γ son las *coordenadas* de área de P, es decir, las razones de las áreas con signo PBC, PCA, PAB a ABC. Las áreas con signo son positivas o negativas de acuerdo con que el circuito dado tenga el mismo sentido que ABC o el contrario.

4. El punto $A(\alpha, \mathbf{a}_0)$ y la recta $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$ determinan el plano $(\alpha\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}, \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0)$.

5. Si $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$ y $(\mathbf{b}, b_0)$ son vectores deslizantes que no se cortan, todos los tetraedros cuyas aristas opuestas sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ tienen el mismo volumen

$$V = \tfrac{1}{6}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_0),$$

independientemente de la posición de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en sus líneas de acción.

6. La recta que pasa por el punto P y corta a dos rectas no paralelas $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$ tiene las coordenadas (§17)

$$(\mathbf{a}_P \times \mathbf{b}_P, \mathbf{p} \times (\mathbf{a}_P \times \mathbf{b}_P)), \qquad \mathbf{p} = \overrightarrow{OP}.$$

7. Si $(\mathbf{a}, \mathbf{a}_0)$, y $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_0)$ son rectas no paralelas y $\mathbf{n}$ es un vector unitario a lo largo de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, su normal común tiene las coordenadas

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{n}\cdot(\mathbf{b}_0\mathbf{a} - \mathbf{a}_0\mathbf{b}) \times \mathbf{n}].$$

8. Las únicas curvas de curvatura constante que pueden estar contenidas en un plano o en una esfera son círculos.

9. A fin de que una curva alabeada pueda estar contenida en una esfera es necesario y suficiente que

$$\rho\tau + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{ds}\right) = 0.$$

[Si $(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{c}) = a^2$ es la esfera,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{c})\cdot\mathbf{T} = 0, \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{c})\cdot\mathbf{N} = -\rho, \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{c})\cdot\tau\mathbf{B} = -d\rho/ds.]$$

10. La curva esférica cerrada

$$x = \operatorname{sen}^2 t, \qquad y = \operatorname{sen} t \cos t, \qquad z = \cos t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi),$$

consta de dos lazos que se cortan en ángulos rectos en el punto doble $A(1, 0, 0)$, y $\kappa = 1$, $\tau = \pm 3/4$ en A.

11. Dos curvas cuya curvatura y torsión son las mismas funciones del arco son *congruentes*.

[Si $\mathbf{T}_1\mathbf{N}_1\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{T}_2\mathbf{N}_2\mathbf{B}_2$ coinciden en el origen común de los arcos y $f(s) = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2$, demostrar que $f'(s) = 0$, $f(s) = 3$, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$, $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ en los puntos correspondientes y $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}_2(s)$.]

12. Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una curva alabeada de curvatura constante, κ, el lugar geométrico $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho\mathbf{N}$ de sus centros de curvatura tiene $\kappa_1 = \kappa$, $\tau_1 = \kappa^2/\tau$.

$$\left[\mathbf{T}_1\frac{ds_1}{ds} = \frac{\tau}{\kappa}\mathbf{B}; \qquad \therefore \frac{ds_1}{ds} = \frac{\tau}{\kappa}, \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{B};\right.$$

$$\kappa_1\mathbf{N}_1\frac{\tau}{\kappa} = -\tau\mathbf{N}; \qquad \therefore \kappa_1 = \kappa, \quad \mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{T};$$

$$\left.-\tau_1\mathbf{N}_1\frac{\tau}{\kappa} = \kappa\mathbf{N}; \qquad \therefore \tau_1 = \kappa^2/\tau.\right]$$

13. El triángulo ABC está sobre el lado positivo de las rectas que forman sus lados. Si x, y, z son las distancias perpendiculares con signo de un punto P a las rectas BC, CA, AB, el lugar geométrico de $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ es una recta perpendicular a $\alpha\mathbf{N}_1 + \beta\mathbf{N}_2 + \gamma\mathbf{N}_3$, donde $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ son vectores unitarios perpendiculares a BC, CA, AB en el sentido positivo. Discutir el caso en que $\alpha/a = \beta/b = \gamma/c$ (a, b, c son los lados de ABC).

A medida que P recorre el triángulo ABC, demostrar mediante una construcción el punto donde $x + y + z$ obtiene sus valores máximo y mínimo.

$$[\nabla(x + y + z) = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3.]$$

14. Un punto P en el plano de un triángulo ABC está a las distancias r_1, r_2, r_3 de A, B, C. Entonces $r_1 + r_2 + r_3$ obtiene su valor mínimo en un punto Q para el cual los ángulos $BQC = CQA = AQB = 120°$. Construir Q.

$[\nabla(r_1 + r_2 + r_3) = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3$, vectores unitarios radiales.]

15. Sobre la superficie $\mathbf{r} = r(u, v)$ la normal unitaria $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)/H$ tiene el gradiente

$$\text{Grad } \mathbf{n} = \mathbf{a}\mathbf{n}_u + \mathbf{b}\mathbf{n}_v \qquad (\mathbf{H} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$$

donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ denotan el conjunto recíproco a $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{n}$ (Prob. 42.7-8). La *curvatura media* J y la *curvatura total* K de la superficie se definen como las invariantes de Grad $\mathbf{n}$:

$$J = -\text{ Div } \mathbf{n}, \qquad K = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).$$

Demostrar que J y K están determinadas por las ecuaciones

$$-J\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_u \times \mathbf{n}_v - \mathbf{r}_v \times \mathbf{n}_u, \qquad K\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v,$$

y son independientes de la elección de los parámetros u, v.

Demostrar que la curvatura total de la superficie de revolución del Prob. 36.1 es

$$K = \frac{f'f''}{u(1 + f'^2)^2};$$

y, que para una esfera de radio a, $K = 1/a^2$.

16. Los puntos P, Q, R dividen a los lados BC, CA, AB del triángulo ABC en las razones $x/(1-x)$, $y/(1-y)$, $z/(1-z)$. Entonces las áreas con signo PQR y ABC (el signo determinado por el sentido del circuito tienen la razón

$$PQR/ABC = 1 - x - y - z + yz + zx + xy.$$

17. Si $\mathbf{f} = \mathbf{i}P(x, y, z) + \mathbf{j}Q(x, y, z) + \mathbf{k}R(x, y, z)$, la ecuación diferencial.

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

se dice exacta cuando $\mathbf{f} = \nabla\varphi$, el gradiente de un escalar.

La ecuación $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ es exacta cuando y solamente cuando rot $\mathbf{f} = 0$; entonces su solución es

$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ = constante para una trayectoria de integración arbitraria.

18. La función $\lambda(x, y, z)$ se llama un *multiplicador* de la ecuación diferencial $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ cuando $\lambda\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ es una ecuación exacta (Prob. 17).

Si la ecuación $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ admite un multiplicador, entonces $\mathbf{f} \cdot$ rot $\mathbf{f} = 0$.

Cuando $\mathbf{f} = \mathbf{i}P(x, y) + \mathbf{j}Q(x, y)$, esta condición se cumple siempre.

19. Si una ecuación exacta $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ admite un multiplicador no

constante $\lambda(x, y, z)$, su solución general está dada por $\lambda(x, y, z) = \text{const.}$

$$[\text{rot}\,(\lambda \mathbf{f}) = \nabla\lambda \times \mathbf{f} = \mathbf{0}.]$$

20. Si la ecuación diferencial $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ admite dos multiplicadores λ, μ cuya razón no es constante, su solución general es $\lambda/\mu = \text{cons.}$ [Usar el Prob. 19.]

Respuestas a los Problemas

CAPÍTULO 1

5.4 $-4/3\,(AB)$; $-2/1\,(A'B')$.

5.7 $-7/5\,(AB)$; $-7/10\,(CD)$.

11.1 (*a*) 60°; (*b*) 90°; (*c*) 180°; (*d*) 70°33′; (*e*)todos$= \cos^{-1}\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

11.2 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

11.3 14/13.

11.4 3.

13.1 (*a*) [−2, 3, −1], [0, 3, 3], [4, 0, 2];
(*b*) 6, 6, 6;
(*c*) [−4, −5, −7], [6, −3, 3], [−2, 8, 4], [0, 0, 0];

13.2 (*a*) $\sqrt{30}$; (*b*) $p=\frac{1}{2}\sqrt{30}$; (*c*) 5; (*d*) 30.

14.7 (i) $A=60°$, $B=120°$, $C=60°$;
(ii) $A=45°$, $B=90°$, $C=60°$.

15.1 $\mathbf{e}^1=[1,-1,0]$, $\mathbf{e}^2=[0,1,-1]$, $\mathbf{e}^3=[0,0,1]$.

15.5 $\dfrac{\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\lambda^2}$, $\dfrac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}}{\lambda^2}$, $\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\lambda^2}$ donde $\lambda=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

15.6 $\mathbf{r}=\alpha\mathbf{a}'+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$, donde $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ es el conjunto recíproco a $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

17.4 (8, −11, −11).

17.8 $\mathbf{r}=\alpha_0\mathbf{a}'+\beta_0\mathbf{b}'+\gamma_0\mathbf{c}'$ (Prob. 15.6).

17.10 Sí.

CAPÍTULO 2

19.1 (i) [4, 5, 6]; (ii) 4, 5, 6; (iii) 40/3.

19.2 23/3.

21.9 $\mathbf{f}=[1,2,-1]$; ejes: $y+2z=z+x=2x-y=2$.

23.1 (*a*) $\mathbf{f}_A = [7, -1, -4]$; (*b*) $2\frac{1}{3}$; (*c*) $\mathbf{f}_O = [7, -5, -6]$.

23.3 20j at (0, 0).

23.5 $Z_a = Z_b = 5500$ lb, $Z_c = Z_d = -4500$ lb.

CAPÍTULO 3

28.2 $[a, b, c]$; una línea recta; $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

31.1 (*a*) $\mathbf{T} = \mathbf{i}$, $\mathbf{N} = \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{k}$;

$\mathbf{T} = \frac{1}{3}[1, 2, 2]$, $\mathbf{N} = \frac{1}{3}[-2, -1, 2]$, $\mathbf{B} = \frac{1}{3}[2, -2, 1]$.

(*b*) $\kappa = \tau = \frac{2}{3}$; $\kappa = \tau = \frac{2}{27}$.

(*c*) $x = 0, z = 0$; $x + 2y + 2z = 13$, $2x - 2y + z = 2$.

31.2 (*a*) $\kappa = \tau = 2/3(1 + 2t^2)^2$;

(*b*) $\kappa = \tau = 1/3a(1 + t^2)^2$.

32.4 $\mathbf{v} = 3[2, 2, 1]$, $\mathbf{a} = 6[1, 2, 0]$;

$\mathbf{T} = \frac{1}{3}[2, 2, 1]$, $\mathbf{N} = \frac{1}{3}[-1, 2, -2]$, $\mathbf{B} = \frac{1}{3}[-2, 1, 2]$;

$\kappa = \tau = 2/27$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 12$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = 6$.

32.5 $\mathbf{v} = [0, -1, 2]$, $\mathbf{a} = [-1, 0, 0]$;

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}[0, -1, 2], \quad \mathbf{N} = [-1, 0, 0], \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}[0, -2, -1];$$

$\kappa = \frac{1}{5}$, $\tau = -\frac{2}{5}$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = 1$.

32.6 $\mathbf{v} = [1, -1, \sqrt{2}]$, $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$;

$$\mathbf{T} = \tfrac{1}{2}[1, -1, \sqrt{2}], \quad \mathbf{N} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1, 0], \quad \mathbf{B} = \tfrac{1}{2}[-1, 1, \sqrt{2}];$$

$\kappa = -\tau = \sqrt{2}/4$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \sqrt{2}$.

35.1 10 millas/hora (16.1 km/hora).

CAPÍTULO 4

36.1 Círculos paralelos $u = a$; meridianos $v = b$.

$\mathbf{n} = [f'(u) \cos v, f'(u) \operatorname{sen} v, 1]/\sqrt{f'^2 + 1}$.

36.2 Hélices circulares $u = a$; rectas perpendiculares al eje z. $\perp$

36.3 (i) Superficie reglada con generatrices que pasan por Γ y paralelas a $[\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$.

(ii) Cono con vértice en 0 y generatrices por Γ. Las curvas paramétricas $u = a$ son generatrices.

36.4 $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = c \cos u$.

36.5 Generatrices.

36.6 generatrices

36.8 $[1, -1, 0]$.

37.1 (*a*) $[-2, 2]$; (*b*) 0; (*c*) $135°$, $2\sqrt{2}$.

37.2 (*a*) $[4, 4, 2]$; (*b*) $10/\sqrt{3}$; (*c*) 6;

(*d*) $2x + 2y + z = 7$, $x - 1 = y - 1 = 2z - 6$.

37.3 $\mathbf{R} - 2ar^{-1}\cos\varphi\,\mathbf{P}$; $(1 + 4a^2r^{-2}\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$.

39.5 Escalar 0; vectorial -2α.

41.1 $\nabla\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; div $\mathbf{f} = 3$, rot $\mathbf{f} = [1, 1, 1]$;

$\nabla\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ z & 2y & x \\ y & x & 2z \end{pmatrix}$; div $\mathbf{g} = 2(x + y + z)$, rot $\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

$\nabla\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 & 2zx & y^2 \\ z^2 & 0 & 2xy \\ 2yz & x^2 & 0 \end{pmatrix}$; div $\mathbf{h} = 0$, rot $\mathbf{h} = [2xy - x^2, 2yz - y^2, 2zx - z^2]$.

41.2 (*a*) $2\mathbf{r}$, 6; (*b*) $-\mathbf{r}/r^3$, 0.

CAPÍTULO 5

43.1 7/3; 17/6; 11/6; 5/2; $(22 + 3\pi)/12$.

43.2 (*a*) $-2\pi r^2(x_0 + y_0)$; (*b*) 0; (*c*) -2.

43.3 $3.75 - 2\log 4$.

43.4 (*a*) $-1/4$; (*b*) $-1/4$; (*c*) $-1/4$.

43.5 (*a*) $77\frac{1}{3}$; (*b*) $94\frac{2}{3}$; (*c*) $88\frac{2}{3}$.

43.6 -2π.

46.1 $F = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2y - \frac{1}{3}y^3$; $32\frac{2}{3}$.

46.2 $F = (x^2/y) - 3x + 4y - 4$.

46.3 $F = x^2yz^3$; 14.

46.4 $\log\left(\dfrac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}\right)^{1/2}$; 0; sí.

46.5 33/2.

46.6 $3a^2/2$.

47.3 $\frac{1}{2}ab\,\varphi$.

47.4 $\frac{1}{2}ab\,\varphi$.

47.5 $3a^2/2$.

47.8 $\frac{1}{4}\pi ab^3$, $\frac{1}{4}\pi a^3b$, $\frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$.

47.9 $\frac{4}{3}ab(a^2 + b^2)$.

47.10 $2\pi ab$.

47.11 $80\frac{2}{3}$.

47.12 14.

47.13 $\frac{16}{3}$.

47.14 $-\frac{1}{12}$.

50.3 2π.

52.2 $8\pi/3$.

52.3 $g = r^m\mathbf{r}/(m+3)$.

52.7 (*a*) 3; (*b*) 40π.

52.10 $\frac{4}{3}\pi(a+b+c)$.

52.11 $4\pi/\sqrt{abc}$; $4\pi(a+b+c)/3\sqrt{abc}$.

54.2 $\mathbf{g} = \mathbf{r}\times\{\frac{1}{3}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$.

54.3 (*a*) $\mathbf{G} = xz[1,-1,0]$, $\mathbf{g} = \frac{1}{3}[xz+yz, -2xz, xy-x^2]$.

(*b*) $\mathbf{G} = [x(y+z) - \frac{1}{2}(y^2+z^2), yz - \frac{1}{2}z^2, 0]$, $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{f}\times\mathbf{r}$.

(*c*) $\mathbf{G} = [-y^2z, -xyz, 0]$, $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{f}\times\mathbf{r}$; $\mathbf{G}-\mathbf{g} = \nabla(-\frac{1}{2}x,y^2z)$.

(*d*) $\mathbf{G} = [xz - \frac{1}{2}y^2, -\frac{1}{2}z^2, 0]$, $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{f}\times\mathbf{r}$.

54.4 (*a*) $\mathbf{g} = \dfrac{r^2(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}}{6}$;

(*b*) $\mathbf{g} = [\frac{1}{3}yz + \frac{1}{2}z, -\frac{2}{3}xz, \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}x]$.

55.2 $\nabla^2\varphi = \dfrac{6}{a}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{r}\right)$, $r < a$; $\nabla^2\varphi = 0$, $r \geqq a$. No; yes.

CAPÍTULO 6

60.1 (*a*) $\varphi = -\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}$; (*b*) ninguna; (*c*) ninguna;

(*d*) $\varphi = \dfrac{r^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$, $\varphi = \log r + C$, $(n = -1)$.

60.3 $\varphi = y + 2z - xyz^2$; $W = 2$.

60.5 $v_2^2 = v_1^2 - 2\gamma M\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$.

60.6 $\varphi = \frac{1}{2}mkr^2$.

60.7 (*a*) $h = v_0^2/2g$; (*b*) $h = Rv_0^2/(2gR - v_0)$.

61.1 $h = \sqrt{\gamma Mp}$.

61.3 35.30 unidad astr; $\varepsilon = 0.97$.

61.4 36 000 000 millas (57 924 000 kilómetros).

63.4 271 slug-ft^2.

CAPÍTULO 7

72.3 $v_r = -a\dfrac{\pi}{\alpha}r^{(\pi/\alpha)-1}\cos\dfrac{\pi}{\alpha}\theta$, $v_\theta = a\dfrac{\pi}{\alpha}r^{(\pi/\alpha)-1}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{\alpha}\theta$.

CAPÍTULO 8

77.2 $[\gamma] = M^{-1}L^3T^{-2}$.

77.5 $[a] = [b] = [\gamma] = T^{-1}$, $[\mathbf{C}] = L^2T^{-1}$, $[\mathbf{A}] = L$, $[\mathbf{B}] = L(a \neq b)$, $[\mathbf{B}] = LT^{-1}\ (a = b)$.

84.1 φ.

CAPÍTULO 9

96.1 $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, $|\mathbf{e}_3| = 3$; todos los ángulos de 60°.

96.2 $g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

$\mathbf{e}^1 = \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{6}\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}^2 = -\frac{1}{4}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{8}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{12}\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}^3 = -\frac{1}{6}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{12}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{e}_3$.

96.3 $u_i = (4, 10, 21)$, $v_i = (\frac{1}{2}, 2, \frac{13}{2})$;

$|\mathbf{u}| = 2\sqrt{13}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{7}$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 17$; $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 27°$.

96.4 $g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}^3 = -\mathbf{k}$.

$u^i = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$, $u_i = (3, -1, 2)$.

ESTA IMPRESION DE 1,000 EJEMPLARES
SE TERMINO EL 15 DE AGOSTO DE 1970,
EN LOS TALLERES DE LA CIA. EDITORIAL
CONTINENTAL, S. A., MEXICO

ANALISIS VECTORIAL

Por LOUIS BRAND

El Análisis Vectorial presenta la teoría fundamental que necesitan los matemáticos, los físicos y los ingenieros, considerando el extenso empleo de los procedimientos vectoriales en la geometría moderna, el análisis y las ciencias físicas.

El presente trabajo es completamente nuevo. Se ha dado un tratamiento más elemental, en forma clara y exposición detallada. Todas las teorías están aclaradas con ejemplos y reforzadas con numerosos problemas (muchos de ellos con sugerencias para su solución).

Escrito por un distinguido profesor y autor, **Análisis Vectorial** cubre completamente los siguientes tópicos:

* Vectores deslizantes, analítica y gráficamente explicados.
* Teoremas de invariantes diferenciales e integrales, con aplicaciones a la física matemática.
* Identidades de Green y sus aplicaciones a la teoría del potencial.
* Un desarrollo lógico de la electrodinámica fundamentado en las ecuaciones de Maxwell y el empleo de las unidades del sistema métrico decimal.
* Espacios vectoriales abstractos (incluyendo el espacio de Hilber).
* La teoría funtamental del álgebra y el cálculo vectorial, más una introducción a sus aplicaciones a la estadística, dinámica, mecánica de los fluidos y electro dinámica.

Louis Brand tiene muchos años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas y es autor de varios textos muy conocidos en este campo. Es también el autor de **Advanced Calculus** publicado por esta editorial con el nombre de **Cálculo Avanzado.**

El profesor Brand ha recibido los grados de Ch. E. y M. A. en física, de la Universidad de Cincinnati y obtenido su Ph. D. en matemáticas de la Universidad de Harvard. Ostenta también el grado de Doctor Honorario de Ciencias de la mencionada Universidad de Cincinnati.

El autor es, en la actualidad, Profesor Jubilado de Matemáticas de la Universidad de Cincinnati, donde sirvió como Jefe de Departamento hasta su retiro en 1955. En 1956-57 fue Profesor Visitador de Whitney (el primero de matemáticas) en el Trinity College y en 1957-58 fue Profesor Visitador en la Universidad de Houston.